

Restauration d'images vectorielles par EDP

Vector image restoration using PDE*

D. Tschumperlé
David.Tschumperle@sophia.inria.fr

R. Deriche
Rachid.Deriche@sophia.inria.fr

I.N.R.I.A

2004 Rte des Lucioles, BP 93, 06560 Sophia Antipolis

Résumé

De nombreuses méthodes basées sur les équations aux dérivées partielles (EDP) sont apparues ces dernières années pour résoudre le problème de la restauration d'images scalaires. Nous proposons ici une nouvelle formulation d'équation de restauration d'images vectorielles et son application à la couleur. Nous comparons ensuite notre méthode avec celle de Sapiro [31] et de Blomgren [8] aussi bien dans l'analyse du comportement, qu'expérimentalement.

Mots Clef

EDP, restauration, images vectorielles, couleur.

Abstract

Many scalar image restoration methods based on Partial Differential Equation (PDE) were developed few years ago. We propose in this paper a new PDE for vector image restoration and his application to color images. We compare the behaviour of our method to the Sapiro's [31] and Blomgren's one [8].

Keywords

PDE, restoration, vector images, color.

1 Introduction

La restauration d'images scalaires bruitées et floues $I_0 = \kappa * I + \nu$ a fait l'objet de nombreuses recherches, et beaucoup d'algorithmes, basés sur des formulations variationnelles ou stochastiques, tentent de résoudre ce problème mal posé. On peut citer par exemple les noms d' Alvarez *et al* [3], Aubert *et al.* [5, 6], Chambolle & Lions [10], Chan [8, 34], Cohen [11], Cottet & Germain [12], Kornprobst & Deriche [19, 18, 17],

Malladi & Sethian [22], Mumford & Shah [33, 24], Morel [2, 23], Nordström [25], Osher & Rudin [29], Perona & Malik [27], Proesman *et al.* [28], Sapiro *et al.* [9, 30, 31, 7, 32], Weickert [35, 36], You *et al.* [37], ... Les méthodes utilisées reviennent souvent à diffuser l'image de manière *anisotropique*, pour lisser le bruit tout en préservant les contours. Cependant, peu de méthodes existent pour traiter les images couleurs (et plus généralement les images vectorielles $I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$).

Nous nous proposons donc ici de combiner les techniques de restauration scalaire avec l'analyse d'images vectorielles, pour créer une EDP de restauration d'images couleur qui supprime le bruit par lissage, mais qui permet également de rehausser les contours flous, grâce à une généralisation des 'filtres de chocs' (Osher-Rudin [26]) au cas vectoriel.

Après avoir rappelé brièvement la diffusion anisotropique des images scalaires, puis introduit l'analyse d'images vectorielles (notamment la définition de normes de variations), nous analyserons les équations de diffusion anisotropes existantes (Sapiro [31] et Blomgren [8]), puis nous introduirons notre EDP de restauration, en la justifiant théoriquement par rapport aux précédentes. Pour finir, nous validerons notre équation sur des images couleurs réelles.

2 Diffusion anisotropique des images

Dans cette section, on se limite aux images scalaires $I^*(x_1, x_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($\Omega \in \mathbb{R}^2$)

La restauration de l'image I^* s'écrit classiquement comme une minimisation d'une fonctionnelle :

$$I^* = \operatorname{argmin} \left(\int_{\Omega} (I^* - I_0)^2 + \Phi(\|\nabla I^*\|) \right)$$

* Article publié dans : Actes du 12^{ème} Congrès RFIA - Paris - 1-3 Février 2000

où $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de régularisation qui permet de préserver les contours. Cette minimisation se réalise en faisant évoluer une EDP sur l'image, provenant de la formulation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\Phi'(\|\nabla I^*\|)}{\|\nabla I^*\|} I_{\xi\xi}^* + \Phi''(\|\nabla I^*\|) I_{\eta\eta}^*$$

où $I_{\eta\eta}^* = \nabla(\nabla I^* \cdot \eta) \cdot \eta$ avec $\eta = \frac{\nabla I^*}{\|\nabla I^*\|}$ et $\xi = \eta^\perp$

La restauration peut alors être vue comme deux lissages simultanés, l'un dans la direction η avec une intensité $c_\eta = \Phi'(\|\nabla I^*\|)$, et l'autre dans la direction ξ (tangente aux isocontours) avec une intensité $c_\xi = \Phi''(\|\nabla I^*\|)/\|\nabla I^*\|$. Les propriétés de conservation des contours et de lissage isotropique en zone homogène imposent naturellement des conditions aux limites sur Φ :

$$\lim_{\|\nabla I^*\| \rightarrow 0} c_\xi = \lim_{\|\nabla I^*\| \rightarrow 0} c_\eta = \alpha > 0$$

$$\lim_{\|\nabla I^*\| \rightarrow \infty} c_\xi = \lim_{\|\nabla I^*\| \rightarrow \infty} c_\eta = 0$$

$$\text{avec } \lim_{\|\nabla I^*\| \rightarrow \infty} \left(\frac{c_\eta}{c_\xi} \right) = 0$$

De nombreuses fonctions Φ ont été proposées dans la littérature (Cauchy, Green, Variation Totale...).

Une variante est de fixer directement les intensités de lissage c_ξ et c_η (Kornprobst et Deriche [19, 18, 17])

$$\frac{\partial I^*}{\partial t} = I_{\xi\xi} + g_\tau(\|\nabla I^*\|) I_{\eta\eta} \quad (g_\tau, \text{ décroissante})$$

La restauration utilisant la diffusion anisotrope scalaire est donc basée sur la connaissance d'une *géométrie locale de l'image*, c'est à dire des variations ∇I^* et des directions ξ et η .

Ce sont ces attributs qui vont être nécessaires pour étendre les équations au cas d'images vectorielles. Il est de ce fait peu intéressant de restaurer une image vectorielle composante par composante, car on ne tient alors pas compte de la corrélation entre composante pour ces attributs géométrique.

3 Quelques normes vectorielles

On considère maintenant une image *vectorielle*

$$I(x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$$

On note I^i , la i -ème image composante de I ($1 \leq i \leq m$).

Dans le cas particulier des images couleurs ($m = 3$, espace RVB), on note :

$$I(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} R(x_1, x_2) = I^1(x_1, x_2) \\ V(x_1, x_2) = I^2(x_1, x_2) \\ B(x_1, x_2) = I^3(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

On cherche à déterminer une norme, représentative des contours de l'image I .

3.1 Premières approches

Il est nécessaire nous l'avons vu, de définir une variation et des attributs (ξ, η) communs aux m composantes, car une variation vectorielle peut exister, sans qu'elle soit nécessairement présente sur une composante particulière du vecteur de l'image.

Une approche simple consiste à utiliser une fonction particulière f qui modélise le mieux la perception des contours vectoriels, et calculer sur l'image scalaire $F^*(x, y) = f(I^1(x, y), I^2(x, y), \dots, I^m(x, y))$, le gradient ∇F^* . On dispose ainsi d'une norme de variation et des directions η et ξ uniques en chaque point. Cependant, le choix d'une telle métrique est un problème difficile. Il n'existe notamment pas de fonction f caractéristiques de *toutes les variations possibles*. Par exemple, une telle fonction pour la couleur est la luminance L^* . Elle ne permet pourtant pas de détecter les contours iso-lumineux !

3.2 Géométrie différentielle des surfaces

Di Zenzo [38] propose quant à lui une étude de l'image, basée sur la géométrie différentielle des surfaces. Il considère une image vectorielle comme une surface 2D, et étudie ses variations locales, au point (x_1, x_2) :

$$dI = \frac{\partial I}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial I}{\partial x_2} dx_2$$

soit :

$$\|dI\|^2 = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix}$$

avec

$$g_{ij} = \frac{\partial I}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial I}{\partial x_j}$$

Les extrema $\lambda_{+/-}$ de cette fonction sont données par les valeurs propres de la matrice $(g_{i,j})$ (appelée *première forme fondamentale*), et ses vecteurs propres indiquent les directions de variation correspondantes η et ξ (avec $\xi \perp \eta$).

$$\begin{cases} \lambda_{+/-} = \frac{g_{11}+g_{22} \pm \sqrt{(g_{11}-g_{22})^2 + 4g_{12}^2}}{2} \\ \eta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2g_{12}}{g_{11}-g_{22}} \\ \xi = \eta + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (1)$$

λ_+ correspond à la variation locale maximum en un point (déplacement dans la direction η) et λ_- à la variation minimum (déplacement dans la direction ξ). A noter que l'on retrouve pour $m = 1$, le résultat du cas scalaire, à savoir :

$$\eta = \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|}, \quad \lambda_+ = \|\nabla I\| \quad \text{et} \quad \lambda_- = 0$$

Application : Dans le cas d'images couleurs, les coefficients g_{11}, g_{12} et g_{22} de la première forme fondamentale se s'écrivent, en chaque point (x_1, x_2) de I :

$$\begin{cases} g_{11} = \left\| \frac{\partial R}{\partial x_1} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial V}{\partial x_1} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial B}{\partial x_1} \right\|^2 \\ g_{12} = \frac{\partial R}{\partial x_1} \frac{\partial R}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial V}{\partial x_2} + \frac{\partial B}{\partial x_1} \frac{\partial B}{\partial x_2} \\ g_{22} = \left\| \frac{\partial R}{\partial x_2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial V}{\partial x_2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial B}{\partial x_2} \right\|^2 \end{cases} \quad (2)$$

A partir de cette étude, plusieurs normes ont été définies :

- Une extension directe de la définition du gradient, comme indicateur de plus grande variation, est de choisir la norme $N(x_1, x_2) = \sqrt{\lambda_+}$. (Fig.2)
- Sapiro [31] préfère quant à lui utiliser une norme de la forme $f(\lambda_+ - \lambda_-)$, en proposant $N(x_1, x_2) = \sqrt{\lambda_+ - \lambda_-}$, car d'après lui, les contours dans le cas vectoriel ne sont pas caractérisés par un grand λ_+ mais au contraire par $\lambda_+ \gg \lambda_-$.
- Blomgren et Chan [8] utilisent plutôt une fonction de $(\lambda_+ + \lambda_-)$, ce que reprend Shah [33] avec sa norme :

$$N(x, y) = \sqrt{\lambda_+ + \lambda_-}$$

Le comportement de ces normes n'est pas semblables sur des points singuliers comme certains type de coins par exemple. Ces différences sont bien visibles sur la Fig.1.

A noter que ces trois dernière normes sont toutes équivalentes dans le cas scalaire, puisqu'on a alors $\lambda_- = 0$. Il est intéressant de chercher les maxima locaux de l'image d'une norme dans la direction η de Sapiro. On obtient ainsi un *détecteur de contours couleur* (fig.2).

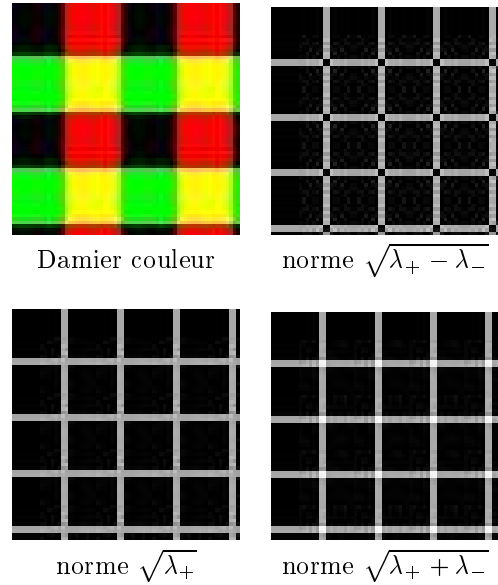


FIG. 1 – Différences entre les normes de variations

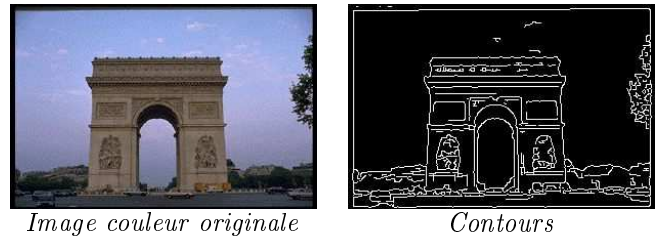


FIG. 2 – Seuillage par hysteresis ($sb=0.01, sh=0.051$) des maxima locaux de $\sqrt{\lambda_+}$ dans la direction η

3.3 $TV_{n,m}$, la norme de Blomgren

Blomgren [8] pose le problème de la restauration d'images vectorielles, sous la forme de minimisation globale d'un critère. Ce critère est une norme de *variation totale*, notée $TV_{n,m}$, calculée sur l'image :

$$TV_{n,m}(I) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left[\int_{\Omega} \|\nabla I^i\| \right]^2} \quad \Omega \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Dans le cas d'images couleurs, on a $n = 2$ et $m = 3$. Cette norme ne peut pas se comparer directement aux précédentes puisqu'elle se calcule sur l'image entière I .

Par contre, pour minimiser cette norme, Blomgren propose une formulation par EDP, résultant des équations d'Euler-Lagrange et obtient une équation de diffusion anisotrope. (section 4.2).

C'est cette équation que nous allons comparer avec la nôtre et celle de Sapiro (section 5).

4 Equations de diffusion

4.1 Diffusion de Sapiro

Sapiro propose l'équation de diffusion anisotrope suivante [31] :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = g(N(x_1, x_2)) I_{\xi\xi} \quad (4)$$

où $N(x_1, x_2) = \sqrt{\lambda_+ - \lambda_-}$ est la norme de Sapiro, ξ la direction de plus faible variation, et $g(\cdot)$ est une fonction décroissante positive de la forme :

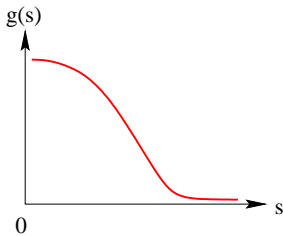


FIG. 3 – Fonction de pondération de diffusion

- $g(s) \rightarrow 1$ quand $s \rightarrow 0$
- $g(s) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow \infty$

On choisit par exemple, $g(s) = e^{-(\frac{s}{k})^2}$. Ce facteur de diffusion permet de distinguer des régions de l'image pour le processus de lissage :

- Dans les zones de contours ($N(x_1, x_2) \gg 0$), il y a peu de diffusion : $\frac{\partial I}{\partial t} \approx 0$.
- Dans les zones homogènes ($N(x_1, x_2) \rightarrow 0$), on diffuse dans une direction ξ : $\frac{\partial I}{\partial t} \approx I_{\xi\xi}$.

Application Pour les images couleurs RVB , l'équation s'écrit pour chaque composante :

$$\begin{aligned} R_t &= g(N(x_1, x_2)) R_{\xi\xi} \\ V_t &= g(N(x_1, x_2)) V_{\xi\xi} \\ B_t &= g(N(x_1, x_2)) B_{\xi\xi} \end{aligned} \quad (5)$$

On s'aperçoit que le facteur de diffusion $g(N(x_1, x_2))$ et la direction de diffusion ξ sont communs et calculés à partir des données des trois composantes R, V et B . On tient donc bien compte de la corrélation entre composantes dans cette équation de diffusion.

4.2 Diffusion de Blomgren

Les équations d'Euler-Lagrange associées au problème de minimisation globale de la $TV_{n,m}$ permettent d'obtenir une équation de diffusion pour chaque composante I^i :

$$\frac{\partial I^i}{\partial t} = \frac{TV_{n,1}(I^i)}{TV_{n,m}(I)} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla I^i}{\|\nabla I^i\|} \right)$$

On peut réécrire cette équation en introduisant la direction ξ^i , parallèle aux isocontours en chaque point pour la composante I^i ($\xi^i \perp \eta^i = \frac{\nabla I^i}{\|\nabla I^i\|}$) :

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla I^i}{\|\nabla I^i\|} \right) = \frac{I_{\xi^i \xi^i}}{\|\nabla I^i\|}$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial I^i}{\partial t} = \frac{A^i}{\|\nabla I^i\|} I_{\xi^i \xi^i} \quad \left(A^i = \frac{TV_{n,1}(I^i)}{TV_{n,m}(I)} \right)$$

Analysons cette équation :

- A^i est un facteur constant à une itération et à une composante donnée. C'est le seul paramètre qui intègre la corrélation inter-composante. A noter que l'aspect local de la géométrie vectorielle n'y rentre pas en compte.
- Les caractéristiques locales du coefficient de diffusion sont donc déterminées par le terme $\frac{1}{\|\nabla I^i\|}$:
 - Dans les zones de contours ($\|\nabla I^i\| \gg 0$), il n'y a pas de diffusion : $\frac{\partial I^i}{\partial t} \approx 0$.
 - Dans les zones homogènes ($\|\nabla I^i\| \rightarrow 0$), on diffuse chaque composante dans une direction ξ^i différente : $\frac{\partial I^i}{\partial t} \approx \alpha I_{\xi^i \xi^i}$ ($\alpha \neq 0$).

Note : Dans les zones homogènes, $\|\nabla I^i\| \rightarrow 0$ et l'équation peut sembler divergente. Mais dans ces régions, on a aussi souvent $I_{\xi^i \xi^i} \rightarrow 0$. Blomgren introduit un coefficient β de régularisation pour l'implémentation :

$$\alpha = \frac{A^i}{\sqrt{\beta + \|\nabla I^i\|^2}}$$

Malgré tout, le comportement numérique d'une telle équation est *très instable*, et il est nécessaire de choisir un pas de temps Δt très proche de 0 pour que l'algorithme ne diverge pas durant l'évolution de l'EDP. Cela implique un nombre d'itération plus important (pratiquement *10 fois plus important* que les autres équations de diffusion présentés dans cet article).

Application Pour les images couleurs RVB , l'équation s'écrit pour chaque composante :

$$I_t = \frac{\gamma(I)}{\sqrt{\gamma(R)^2 + \gamma(V)^2 + \gamma(B)^2}} \frac{I_{\xi^i \xi^i}}{\|\nabla I\|} \quad (6)$$

avec

$$\gamma(I) = \int_{\Omega} \|\nabla I\|$$

Idem pour les composantes V et B .

4.3 Une nouvelle équation de diffusion

Nous reprenons ici le principe de nos précédents travaux réalisé sur des images scalaires [19, 18, 17] et nous l'étendons au cas vectoriel, en utilisant les normes précédentes. Voici l'approche que nous proposons :

Les normes vectorielles $N(x_1, x_2)$ sont des indicateurs de la géométrie locale de l'image :

- $N(x_1, x_2) \approx 0$: le point est dans une zone homogène.
- $N(x_1, x_2) \gg 0$: le point est dans une région de contours.

En partant de l'idée que l'on veut lisser l'image isotropiquement dans les zones homogènes (afin d'éliminer le bruit le mieux possible, celui-ci étant isotrope), et de lisser parallèlement aux contours (i.e dans la direction ξ) dans les autres régions, on arrive assez naturellement à l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = g(N(x_1, x_2)) I_{\eta\eta} + I_{\xi\xi}$$

où $g(\cdot)$ est une fonction décroissante, par exemple $g(s) = e^{-\left(\frac{s}{k}\right)^2}$.

Cette nouvelle approche que nous proposons pour la couleur est la seule qui prenne en compte deux façon de lisser suivant le type de région de l'image considérée. Regardons le comportement local de notre équation :

- Dans les zones homogènes ($g \approx 1$), la diffusion est isotropique : $\frac{\partial I}{\partial t} = I_{\eta\eta} + I_{\xi\xi} = \Delta I$
Il n'y a donc pas de direction préférentielle pour le lissage.
- Sur les contours ($g \rightarrow 0$), la diffusion est parallèle au contour : $\frac{\partial I}{\partial t} = I_{\xi\xi}$. Il est donc préservé.

Application L'équation dans le cas d'image couleur donne :

$$\begin{aligned} R_t &= g(N(x_1, x_2)) R_{\eta\eta} + R_{\xi\xi} \\ V_t &= g(N(x_1, x_2)) V_{\eta\eta} + V_{\xi\xi} \\ B_t &= g(N(x_1, x_2)) B_{\eta\eta} + B_{\xi\xi} \end{aligned} \quad (7)$$

La corrélation est prise en compte à la fois dans les intensités de diffusion (grâce à $g(N)$) et dans les directions de diffusion (termes η et ξ).

5 Comparaison des équations de diffusions

5.1 Comparaison expérimentale

Pour comparer les trois équations de diffusion (5), (6) et (7), observons tout d'abord leur comportement sur une image synthétique couleur : (Fig.4).

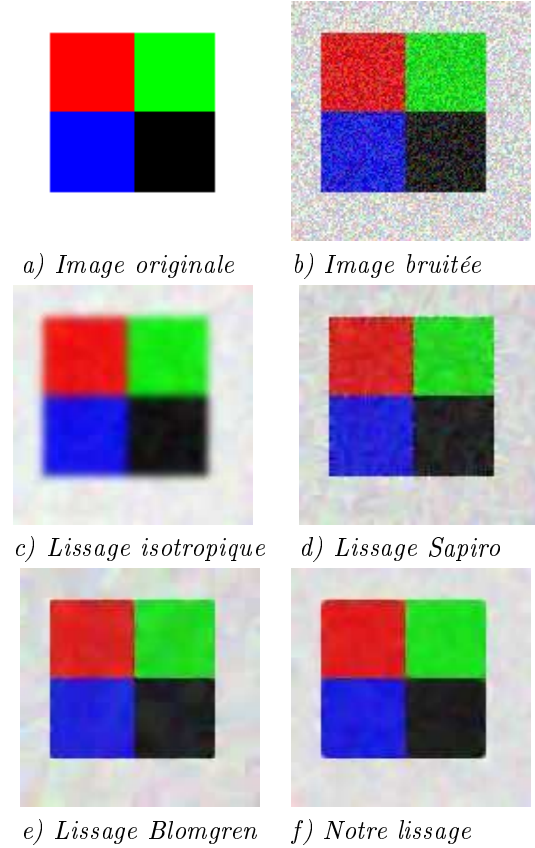


FIG. 4 - Comparaison des équations de diffusion sur une image synthétique couleur

5.2 Analyse des comportements

Les différents comportements peuvent être justifiés théoriquement à partir de l'analyse des équations. Plusieurs critères rentrent en effet en jeu :

- Dans quelle direction s'effectue localement le lissage ?
- Comment varie le coefficient de diffusion, par rapport à la géométrie de l'image ?

Analysons ces différents points :

Comportement dans les zones homogènes : les diffusions de Sapiro et Blomgren présentent un effet de bruit dans les zones homogènes. Notre équation se rapproche plus du résultat obtenu par lissage isotropique. L'explication de ce phénomène est simple :

- Dans les zones homogènes, les équations de Blomgren et Sapiro effectuent un lissage dans des direction ξ ou ξ^i arbitraires, puisqu'elles ne représentent pas une direction parallèle à un contour. *C'est donc le bruit qui décide de la direction de lissage dans ces zones !*

Remarquons d'ailleurs que la méthode de Blomgren donne de meilleurs résultats : La diffusion se fait en effet dans des directions ξ^i indépendantes sur chaque composante. Il y a donc *mélange des couleurs*, et une meilleure uniformisation du lissage.

Cette propriété, bien qu'avantageuse pour les zones homogènes, devient un problème près des contours.

- Notre équation de diffusion quant à elle diffuse isotropiquement dans les zones homogènes. (par construction). On retrouve donc bien un résultat semblable à celui de la Fig.4c) pour les zones homogènes, l'élimination du bruit est bien meilleure.

Comportement près des contours : Le comportement commun des trois EDP de diffusion anisotropique est de lisser seulement dans la direction parallèle aux contours. Par contre, la variation du coefficient de diffusion n'est pas la même :

- les EDP de Blomgren et Sapiro diffusent d'autant moins les contours que le gradient (ou la norme) est important. Cela signifie que pour des contours très marqués, il n'y a presque plus de diffusion, donc peu d' *élimination du bruit* sur les contours francs.

Notons que la méthode de Blomgren détériore quelque peu les contours, puisque ceux-ci évoluent dans des directions indépendantes ξ^i . De plus, ils sont 'détectés' par une fonction $\frac{1}{\|\nabla I\|}$, ce qui rajoute de l'incertitude sur la présence effective ou non d'un contour. On perd donc du détail dans ces zones.

- Notre équation diffuse toujours avec la même intensité sur toute les composantes dans la direction parallèle au contour. On élimine donc toujours le bruit. Il y a cependant un problème dans les zones à très forte courbure κ (par exemple, aux coins du

carré). Pour s'en convaincre, regardons ce qui se passe dans le cas scalaire ($m = 1$) :

$$I_t = I_{\xi\xi} = \kappa \|\nabla I\|$$

qui peut être vu comme la formulation "Level Set" de l'évolution de la courbe isophote :

$$\vec{C}_t = \kappa \vec{N}$$

et on lisse donc les coins dans *leur direction normale*, à une vitesse proportionnelle à la courbure (donc importante). A noter cependant que le méthode de Sapiro souffre des mêmes défauts si la fonction de pondération choisie permet un lissage sur les contours ($g_\tau(N(x1,x2)) \neq 0$).

6 Vers une équation de restauration qui réduit le flou

Bien que le processus de diffusion permette d'éliminer efficacement le bruit, la plupart des images que l'on souhaite restaurer comportent généralement du flou, dû par exemple à l'optique de l'appareil d'acquisition. Même si l'on ne connaît pas a priori les raisons de ce flou (PSF de l'appareil), on peut améliorer l'image.

6.1 Filtres de chocs

Rudin et Osher [26] proposent une méthode de rehaussement de contours par EDP pour les images *scalaires*, basée sur des filtres de chocs. Le principe est de rehausser le contour dans la direction du gradient ∇I^* (Fig.5) :

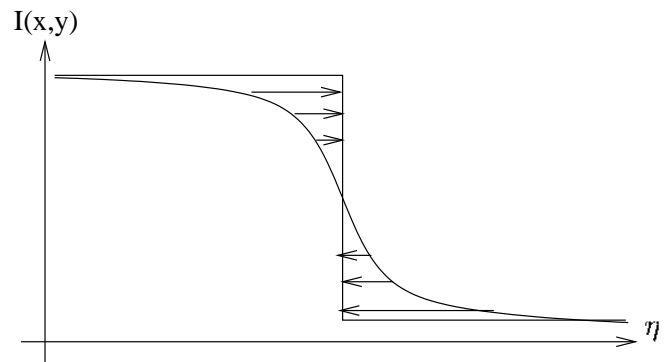


FIG. 5 – Principe des filtres de choc

Une formulation des filtres de choc en vectoriel est donc :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\text{sign}(I_{\eta\eta}) I_\eta$$

Cela revient à rehausser chaque composante dans une direction commune η , où η est calculé avec la méthode de DiZenzo.

Pour éviter de rehausser le bruit dans les zones homogènes, on pondère le terme de choc, avec la fonction $(1 - g(\cdot))$, complémentaire de $g(\cdot)$ (figure Fig.3), qui vaut :

- $g(\cdot) \rightarrow 0$ dans les zones homogènes.
- $g(\cdot) \rightarrow 1$ dans les régions de contours.

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -(1 - g(N(x_1, x_2)) \text{sign}(I_{\eta\eta}) I_{\eta}$$

La figure (Fig.6) illustre le comportement de ces filtres de chocs sur une image floue.



a) Image floue

b) Image rehaussée

FIG. 6 – Application d'un filtre de choc couleur

6.2 Couplage diffusion anisotrope - filtre de choc

Pour restaurer les images floues et bruitées, on peut diffuser anisotropiquement l'image pour enlever le bruit, puis rehausser les contours avec les filtres de choc. Dans nos précédents travaux, nous avons couplé ces méthodes en une seule équation de restauration d'images floues et bruitées [19, 18, 17]. Nous proposons ici, d'étendre cette équation au cas d'images vectorielles.

On ajoute de plus un terme d'attache aux données pour pouvoir contrôler si l'image finale calculée est plus ou moins proche de l'estimée initiale. On obtient ainsi :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \alpha_a (I - I_0) + \alpha_d (g_1(N_{\sigma}(x_1, x_2)) I_{\eta\eta} + I_{\xi\xi}) - \alpha_r (1 - g_2(N_{\sigma}(x_1, x_2))) \text{sign}(G_{\sigma} * I_{\eta\eta}) I_{\eta}$$

où N_{σ} est la norme de Sapiro, calculée sur $G_{\sigma} * I$ et g_1 et g_2 deux fonctions du type Fig.3.

Les paramètres libres α_i permettent d'accentuer plus ou moins les différentes opérations (lissage, réaction

ou attache aux données), durant le processus de restauration.

La figure fig.7 montre bien l'importance du terme d'attache aux données pour la convergence de l'algorithme. Ce terme qui n'est pas présent dans l'équation de Sapiro oblige l'arrêt de l'algorithme avant convergence pour obtenir un résultat satisfaisant. Dans cet exemple, la convergence est admise lorsque la variation moyenne par pixel est inférieure à $10E-6$.

7 Résultats expérimentaux

Nous avons utilisé cette équation de restauration sur deux images réelles. Nous avons restaurés nos images dans l'espace de couleur RGB . Notre équation de restauration utilise la norme $\sqrt{\lambda_+}$, et les paramètres $\alpha_a = 0.2, \alpha_d = 1$ et $\alpha_r = 0.7$.

Les résultats sont présentés sur les figures 8 et 9.

On retrouve les comportements théoriques qui ont été observés sur l'image synthétique :

- Des effets de bruit dans les zones homogènes, pour Sapiro et Blomgren. Cet effet étant plus accentué avec la diffusion de Sapiro. Notre restauration étant la meilleure pour ces zones. *Le terme d'attache aux données ne permet cependant pas d'obtenir un lissage complet de ces zones, mais il permet d'obtenir une convergence* de l'algorithme.
- Notre terme de filtre de choc permet d'améliorer partiellement la netteté des contours. On peut cependant regretter que certaines partie de l'image paraissent plus synthétiques, les filtres de choc ayant tendance à transformer les signaux continus en signaux constants par morceaux (notamment, on perd de la 'rondeur').

8 Conclusion

Dans cet article, nous avons abordé le problème de la restauration d'images vectorielles bruitées et floues et nous l'avons appliqué au cas d'images couleurs. Pour cela nous nous sommes basés sur les travaux les plus effectifs proposés récemment dans la littérature pour traiter le cas des images couleurs, ainsi que sur nos précédents travaux que nous avons généralisé au cas des images vectorielles. Ceci nous a permis de développer, mettre en oeuvre et valider une EDP bien adaptée à la restauration d'images couleurs bruitées et floues. Les résultats obtenus sont très prometteurs et ouvrent de nouvelles perspectives pour le traitement d'images vectorielles.

Références

- [1] 1994.
- [2] L. Alvarez, P-L. Lions, and J-M. Morel. Image selective smoothing and edge detection by nonli-

- near diffusion (II). *SIAM Journal of numerical analysis*, 29:845–866, 1992.
- [3] Luis Alvarez and Luis Mazorra. Signal and image restoration using shock filters and anisotropic diffusion. *SIAM Journal of numerical analysis*, 31(2):590–605, April 1994.
- [4] Charles A. Poynton. Poynton’s colour faq (www.inforamp.net/poynton). Web page, 1995.
- [5] G. Aubert, M. Barlaud, L. Blanc-Feraud, and P. Charbonnier. Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. *IEEE Trans. Imag. Process.*, 5(12), February 1997.
- [6] G. Aubert and L. Vese. A variational method in image recovery. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34(5):1948–1979, October 1997.
- [7] M.J. Black, G. Sapiro, D.H. Marimont, and D. Heeger. Robust anisotropic diffusion. *IEEE Trans. Imag. Proc.*, 7(3):421–432, 1998. Special Issue on Partial Differential Equations and Geometry-Driven Diffusion in Image Processing and Analysis.
- [8] P. Blomgren and T.F. Chan. Color tv: Total variation methods for restoration of vector-valued images. *IEEE Trans. Imag. Proc.*, 7(3):304–309, 1998. Special Issue on Partial Differential Equations and Geometry-Driven Diffusion in Image Processing and Analysis.
- [9] V. Caselles, J.M. Morel, G. Sapiro, and A. Tannenbaum. Introduction to the special issue on partial differential equations and geometry-driven diffusion in image processing and analysis. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3):269–273, 1998.
- [10] A. Chambolle and P-L. Lions. Image recovery via total variation minimization and related problems. *Numer. Math.*, 76(2):167–188, 1997.
- [11] Laurent D. Cohen. Auxiliary variables and two-step iterative algorithms in computer vision problems. *ICCV*, 1995.
- [12] G.-H. Cottet and L. Germain. Image processing through reaction combined with nonlinear diffusion. *Mathematics of Computation*, 61(204):659–673, October 1993.
- [13] R. Deriche and O. Faugeras. Les EDP en Traitement des Images et Vision par Ordinateur. *Traitement du Signal*, 13(6), 1996.
- [14] J. Weickert. Coherence-enhancing diffusion of colour images. *7th National Symposium on Pattern Recognition and Image Analysis*, April 1997.
- [15] Ron Kimmel. What is a natural norm for multi channel image processing, March 1997.
- [16] P. Kornprobst. *Contributions à la restauration d’images et à l’analyse de séquences: Approches Variationnelles et Equations aux Dérivées Partielles*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1998.
- [17] P. Kornprobst, R. Deriche, and G. Aubert. Image coupling, restoration and enhancement via PDE’s. In *International Conference on Image Processing*, volume II of III, pages 458–461, Santa-Barbara, California, October 1997.
- [18] P. Kornprobst, R. Deriche, and G. Aubert. Non-linear operators in image restoration. In *Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 325–331, Puerto-Rico, June 1997. IEEE Computer Society.
- [19] P. Kornprobst, R. Deriche, and G. Aubert. Edp, débruitage et réhaussement en traitement d’image: Analyse et contributions. In *11 ème Congres RFLA*. AFCET, January 1998.
- [20] Lucido Laurence, Deriche Rachid, Alvarez Luis, and Rigaud Vincent. Sur quelques schémas numériques de résolution d’équations aux dérivées partielles pour le traitement d’images. Rapport de Recherche 3192, INRIA, June 1997.
- [21] Q.-T. Luong. La couleur en vision par ordinateur: une revue. *Traitement du Signal*, 8(1):3–34, 1991.
- [22] R. Malladi and J.A. Sethian. Image processing: Flows under min/max curvature and mean curvature. *Graphical Models and Image Processing*, 58(2):127–141, March 1996.
- [23] J-M. Morel and S. Solimini. Segmentation of images by variational methods: A constructive approach. *Rev. Math. Univ. Complut. Madrid*, 1:169–182, 1988.
- [24] D. Mumford and J. Shah. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42:577–684, 1989.
- [25] N. Nordström. Biased anisotropic diffusion - a unified regularization and diffusion approach to edge detection. *Image and Vision Computing*, 8(11):318–327, 1990.
- [26] Stanley Osher and Leonid I. Rudin. Feature-oriented image enhancement using shock filters. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 27(4):919–940, August 90.
- [27] P. Perona and J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7):629–639, July 1990.

- [28] M. Proesmans, E. Pauwels, and L. Van Gool. *Coupled Geometry-Driven Diffusion Equations for Low-Level Vision*, pages 191–228. Computational imaging and vision. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [29] L. Rudin and S. Osher. Total variation based image restoration with free local constraints. In *International Conference on Image Processing* [1], pages 31–35.
- [30] G. Sapiro and V. Caselles. Contrast enhancement via image evolution flows. *Graphical Models and Image Processing*, 59(6):407–416, 1997.
- [31] G. Sapiro and D.L. Ringach. Anisotropic diffusion of multivalued images with applications to color filtering. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(11):1582–1585, 1996.
- [32] G. Sapiro, A. Tannenbaum, Y.L. You, and M. Kaveh. Experiments on geometric image enhancement. In *International Conference on Image Processing* [1].
- [33] Jayant Shah. A common framework for curve evolution, segmentation and anisotropic diffusion. *IEEE*, 1996.
- [34] D.M. Strong and T.F. Chan. Spatially and scale adaptive total variation based regularization and anisotropic diffusion in image processing. Technical Report 46, UCLA, November 1996.
- [35] J. Weickert. *Anisotropic Diffusion in Image Processing*. PhD thesis, University of Kaiserslautern, Germany, Laboratory of Technomathematics, January 1996.
- [36] J. Weickert. *Anisotropic Diffusion in Image Processing*. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1998.
- [37] Y.L. You, M. Kaveh, W.Y. Xu, and A. Tannenbaum. Analysis and Design of Anisotropic Diffusion for Image Processing. In *International Conference on Image Processing* [1], pages 497–501.
- [38] S. Di Zenzo. A note on the gradient of a multi-image. *Comput. Vision Graphics Image Processing*, 33:116–125, 1986.

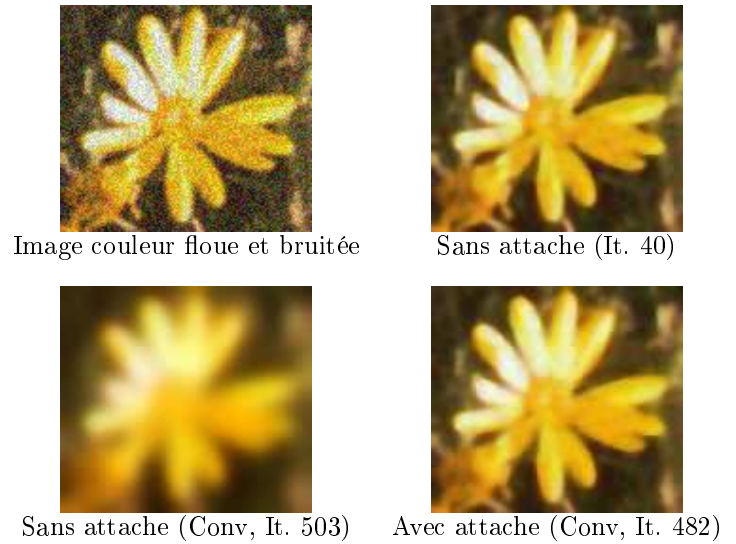


FIG. 7 – Importance du terme d'attache aux données pour la convergence (Ici, avec notre algorithme)



FIG. 8 – Restauration de l'image couleur d'un visage



a) Image floue et bruitée



b) Notre restauration



c) Restauration Sapiro



d) Restauration Blomgren ($TV_{n,m}$)



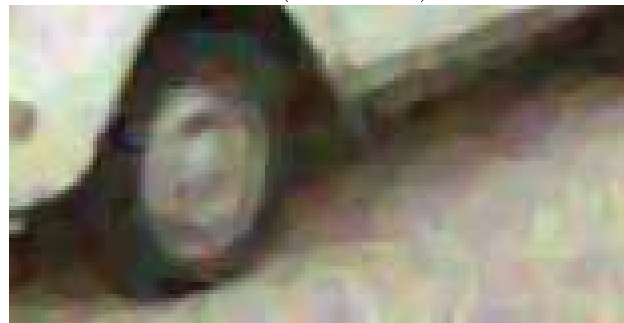
Zoom (bruité)



Zoom (Notre EDP)



Zoom (Sapiro)



Zoom ($TV_{n,m}$)

FIG. 9 – Comparaison des algorithmes sur une image réelle