

Régularisation par EDP de Champs de Vecteurs Orthonormés et Applications

Regularization of Orthonormal Vector Sets and Applications

D. Tschumperlé

R. Deriche

I.N.R.I.A, Projet ROBOTVIS,
2004 Rte des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia Antipolis, France
{David.Tschumperle,Rachid.Deriche}@sophia.inria.fr

Résumé

Nous proposons un formalisme variationnel basé sur une minimisation contrainte de Φ -fonctionnelles, permettant de régulariser une image dont chaque point est un ensemble de plusieurs vecteurs, unitaires et orthogonaux entre eux. Cette approche unificatrice nous permet de faire un lien direct avec les récents travaux sur la régularisation de champs de vecteurs unitaires, ainsi que de résoudre des problèmes plus complexes comme la régularisation d'images de matrices de rotation et de tenseurs de diffusion.

Mots clef

Régularisation, EDP vectorielles, contraintes orthonormales, rotations, tenseurs IRM, chromaticité et orientations.

Abstract

We propose a variational framework allowing to regularize images of orthonormal vector sets. This unifying approach creates a direct link with recent work on orientation diffusion, but can be also used for more complex applications, as the regularization of rotation matrices and diffusion tensors.

Keywords

Regularization, vector PDE's, orthonormal constraints, rotations, MRI tensors, chromaticity and orientations.

1 Introduction

La régularisation d'images avec préservation des discontinuités est depuis plusieurs années, un sujet très étudié en vision par ordinateur. Le formalisme variationnel basé sur la minimisation de fonctionnelles, utilisant des EDP de diffusion (équations aux dérivées partielles) a plus particulièrement prouvé son efficacité pour la restauration d'images scalaires. Nous pouvons citer par exemple les travaux d'Alvarez [1, 2], Charbonnier [11, 12], Chambolle & Lions [8], Chan [6], Cohen [13], Kornprobst & Deriche [22, 23, 24], Malladi & Sethian [27], Mumford & Shah [29, 41], Morel [28], Nordström [31], Osher & Rudin [36], Perona & Malik [33], Proesman [34], Sapiro [7, 38, 39, 40], Sochen & Kimmel [42], Weickert [51], You [53].

Plus récemment, la régularisation d'images *vectorielles* par EDP est devenu un sujet actif de recherche, du fait du nombre important de problèmes que ces techniques peuvent traiter : La restauration d'images couleurs [6, 20, 40, 42, 46, 47, 51], de flots optiques ou de champs de directions [9, 32, 43], le remplissage de taches ("inpainting") [5, 10], l'analyse multi-échelle [2, 35, 52] en sont quelques exemples. L'introduction de techniques de minimisations *contraintes* a également ouvert la voie à la régularisation de données plus spécifiques, en permettant d'ajouter un fort a-priori sur le type des solutions souhaitées : des algorithmes de restauration agissant sur des vecteurs unitaires d'orientation, des vecteurs chromaticités [9, 21, 43, 47], ou encore des données définies sur des surfaces implicites [4] ont ainsi été récemment proposés. En pratique, ces minimisations aboutissent à des EDP de diffusion comportant *un terme de couplage* entre les différentes composantes vectorielles des images considérées.

Cet article propose une méthode variationnelle permettant de régulariser un type très général de données contraintes : des images dont chaque point est un *ensemble de vecteurs n-D orthonormés*, c-à-d composé de plusieurs vecteurs unitaires et orthogonaux entre eux, pouvant représenter de nombreuses informations différentes. Nous retrouvons bien sûr le cas des vecteurs unitaires déjà abordé dans [9, 21, 43, 47] (lorsque les ensembles sont réduits à des singletons), mais ce formalisme nous permet également de traiter des données plus complexes, comme celles définies par exemple par des matrices orthogonales (qui peuvent provenir ou non d'une décomposition spectrale) : matrices de rotation [49], de changement de base, orientations de tenseurs de diffusion [25], de tenseurs de structure (second moments) [51, 17, 26] ou de matrices de covariance, . . .

L'idée est donc de trouver un processus variationnel général qui restaure directement ces images contraintes, en évitant toute conversion susceptible d'entraîner une perte d'information ou d'introduire des discontinuités non significatives pour la régularisation (ce problème sera notamment illustré dans le cas des rotations 3D). Pour cela, nous proposons une solution basée sur des EDP de diffusion minimisant une Φ -fonctionnelle avec contraintes (section 3),

en illustrant le rôle important de cette contrainte. Deux cas particuliers intéressants sont ensuite abordés : D’abord la restauration de vecteurs unitaires (section 4), en faisant un lien direct avec les précédents travaux sur ce sujet, puis nous traitons le cas où chaque point de l’image est une *base orthonormée 3D*, et proposons une interprétation mécanique des équations contraintes correspondantes (section 5). Deux applications originales sont alors proposées : la régularisation de mouvements estimés de caméra et la restauration d’images IRMd de tenseurs de diffusion (section 5.3 et 5.4). Finalement, quelques résultats obtenus sur des données synthétiques et réelles viennent illustrer les possibilités d’applications traitées par ce formalisme.

2 Contexte général et notations

Considérons m images de vecteurs $\mathbf{I}^{[k]} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, supposées dérivables et définies sur un domaine fermé Ω de \mathbb{R}^p (où $0 < k \leq m \leq n$, et typiquement $p = 1, 2$ ou 3). Nous appellerons $I_i^{[k]} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ l’image scalaire de la $i^{\text{ème}}$ composante vectorielle de $\mathbf{I}^{[k]} : \forall M \in \Omega$,

$$\mathbf{I}^{[k]}(M) = \left(I_1^{[k]}(M), I_2^{[k]}(M), \dots, I_n^{[k]}(M) \right)$$

Soit \mathcal{B} , l’ensemble des m images vectorielles $\mathbf{I}^{[k]} :$

$$\forall M \in \Omega, \mathcal{B}(M) = \left\{ \mathbf{I}^{[1]}(M), \mathbf{I}^{[2]}(M), \dots, \mathbf{I}^{[m]}(M) \right\}$$

Nous supposons vérifiées ces *contraintes orthonormales* :

$$\forall M, \mathbf{I}^{[k]}(M) \cdot \mathbf{I}^{[l]}(M) = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases} \quad (1)$$

où $\mathbf{I}^{[k]} \cdot \mathbf{I}^{[l]} = \sum_{i=1}^n I_i^{[k]} I_i^{[l]}$ est le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n . Ces contraintes signifient simplement que :

$\mathcal{B}(M)$ est un ensemble de m vecteurs orthonormés n -D.

Nous cherchons à régulariser anisotropiquement de telles images \mathcal{B} d’ensembles orthonormés, qui peuvent modéliser de nombreuses données différentes. Nous nous intéresserons plus particulièrement au cas simple des vecteurs unitaires (lorsque l’ensemble est réduit à un seul vecteur, $m = 1$), et au cas des matrices orthogonales (les vecteurs colonnes de ces matrices forment une base orthonormée, $m = n$).

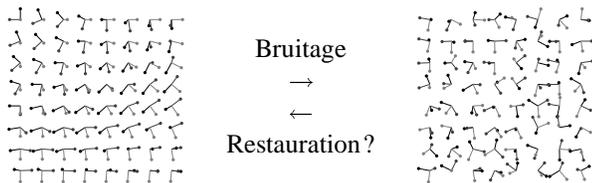


FIG. 1 – Comment régulariser un champ de vecteurs orthonormés tout en conservant les contraintes d’orthonormalité ?

3 Une formulation variationnelle

On veut trouver une version régularisée \mathcal{B} d’une image initiale \mathcal{B}_0 (bruitée) d’ensemble de vecteurs orthonormés,

$$\mathcal{B}_0(M) = \left\{ \mathbf{I}_0^{[1]}(M), \mathbf{I}_0^{[2]}(M), \dots, \mathbf{I}_0^{[m]}(M) \right\}$$

tout en préservant la structure orthonormale de \mathcal{B} .

3.1 Cas d’une régularisation non contrainte

L’image régularisée \mathcal{B} peut être cherchée comme la solution de la minimisation d’une Φ -fonctionnelle, méthode de restauration bien connue pour les images scalaires [11, 23, 24, 33], et plus récemment pour des champs de vecteurs [6, 20, 40, 42, 46, 47, 51]. Le principe est le suivant : chaque vecteur $\mathbf{I}_0^{[k]}$ des ensembles bruités \mathcal{B}_0 peut être lissé anisotropiquement (débruitage avec préservation des discontinuités) en minimisant

$$E_{\text{diff}}(\mathbf{I}^{[k]}) = \int_{\Omega} \left[\frac{\alpha}{2} \|\mathbf{I}^{[k]} - \mathbf{I}_0^{[k]}\|^2 + \Phi(\|\nabla \mathbf{I}^{[k]}\|) \right] d\Omega \quad (2)$$

où $\|\nabla \mathbf{I}^{[k]}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|\nabla I_i^{[k]}\|^2}$ définit une *norme de gradient vectorielle*, caractéristique d’une variation locale du vecteur, à la fois en norme et en orientation. La fonction $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une *fonction de régularisation* qui contrôle le comportement anisotrope ou isotrope de la diffusion, tandis que le paramètre d’attache aux données $\alpha \in \mathbb{R}$ évite à la solution régularisée d’être trop lisse. Différentes Φ -fonctions ont déjà été proposées dans la littérature relative aux EDP de diffusion : Surfaces minimales [11], Geman & McClure [18], Perona & Malik [33], Variation totale [37], Tikhonov [45],... Le choix de la Φ -fonction adéquate dépend bien sûr du type de régularisation souhaité.

Un moyen de minimiser la fonctionnelle $E_{\text{diff}}(\mathbf{I}^{[k]})$ est de calculer son *Lagrangien* (vectoriel) $\mathcal{L}(E_{\text{diff}}(\mathbf{I}^{[k]})) \in \mathbb{R}^n$ qui est ici, en utilisant une notation composante par composante :

$$\mathcal{L}(E_{\text{diff}}(\mathbf{I}^{[k]}))_i = \alpha (I_i^{[k]} - I_{i_0}^{[k]}) - \text{div} \left(\frac{\Phi'(\|\nabla \mathbf{I}^{[k]}\|)}{\|\nabla \mathbf{I}^{[k]}\|} \nabla I_i^{[k]} \right)$$

Puis, d’utiliser la descente de gradient associée :

$$\begin{cases} \mathbf{I}_{(t=0)}^{[k]} = \mathbf{I}_0^{[k]} \\ \frac{\partial \mathbf{I}^{[k]}}{\partial t} = \alpha (I_{i_0}^{[k]} - I_i^{[k]}) + \text{div} \left(\frac{\Phi'(\|\nabla \mathbf{I}^{[k]}\|)}{\|\nabla \mathbf{I}^{[k]}\|} \nabla I_i^{[k]} \right) \end{cases} \quad (3)$$

jusqu’à convergence, pour chaque composante $i = 1 \dots n$.

Pour régulariser le champ de vecteurs orthonormés \mathcal{B}_0 , une première idée naturelle serait donc d’appliquer une EDP de diffusion (3) sur chaque vecteur $\mathbf{I}_0^{[k]}$ de \mathcal{B}_0 . La Fig.2 montre le résultat obtenu en appliquant cette méthode sur une image synthétique de bases 2D orthonormées (composée d’un mélange de bases directes et indirectes).

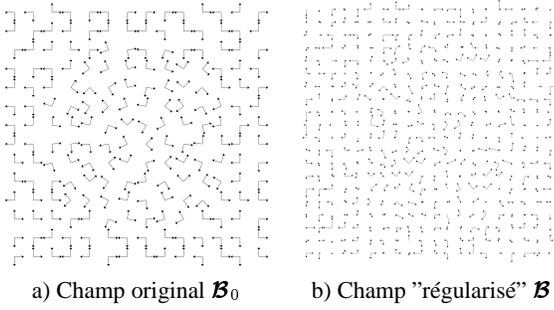


FIG. 2 – Régularisation indépendante des vecteurs $\mathbf{I}_0^{[k]}$.

Cette méthode découplée (donc non contrainte) ne respecte pas les propriétés orthonormales de \mathcal{B} : Les normes unitaires et les angles orthogonaux entre les vecteurs $\mathbf{I}^{[k]}$ ne sont pas intrinsèquement préservés par les EDP de diffusion (3). Nous devons donc introduire explicitement *des contraintes orthonormales*, dans le processus de minimisation de la fonctionnelle.

La régularisation de vecteurs contraints a déjà été abordé dans [4, 9, 21, 43, 47]. Les auteurs proposaient des EDP de diffusion agissant sur des directions vectorielles grâce à un terme de couplage permettant de respecter une contrainte de norme unitaire. Notre contrainte orthonormale est plus générale car elle implique non seulement un couplage entre les composantes d'un même vecteur $\mathbf{I}^{[k]}$, mais également un couplage supplémentaire entre les vecteurs eux-mêmes.

3.2 Respect des contraintes orthonormales

Pour régulariser l'image $\mathcal{B}(M)_0$, nous proposons donc de minimiser la fonctionnelle suivante :

$$E(\mathcal{B}) = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \left[\frac{\alpha}{2} \|\mathbf{I}^{[k]} - \mathbf{I}_0^{[k]}\|^2 + \Phi(\|\nabla \mathbf{I}^{[k]}\|) \right] d\Omega \quad (4)$$

relativement aux m images vectorielles $\mathbf{I}^{[k]}$, soumises aux contraintes orthonormales (1) :

$$\forall M \in \Omega, \quad \mathbf{I}^{[p]}(M) \cdot \mathbf{I}^{[q]}(M) = \delta_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q \\ 0 & \text{si } p \neq q \end{cases}$$

Soit $\mathcal{L}^{[k]} \in \mathbb{R}^n$, le *vecteur Lagrangien* de l'énergie $E(\mathcal{B})$ relativement au vecteur $\mathbf{I}^{[k]}$:

$$\mathcal{L}_i^{[k]} = \alpha (I_i^{[k]} - I_{i_0}^{[k]}) - \operatorname{div} \left(\frac{\Phi'(\|\nabla \mathbf{I}^{[k]}\|)}{\|\nabla \mathbf{I}^{[k]}\|} \nabla I_i^{[k]} \right)$$

On retrouve bien sûr l'expression de $\mathcal{L}(E_{\text{diff}}(\mathbf{I}^{[k]}))$ du cas non contraint (3), ce qui revient à associer à chaque vecteur $\mathbf{I}^{[k]}$ une énergie semblable à celle de la fonctionnelle (2). Les contraintes orthonormales sont ensuite introduites en ajoutant explicitement à la fonctionnelle (4), m^2 multiplicateurs de Lagrange $\lambda_{pq} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, chacun étant associé à la contrainte :

$$\forall M \in \Omega, \quad \mathbf{I}^{[p]} \cdot \mathbf{I}^{[q]} - \delta_{pq} = 0 \quad (p, q \in [1, m])$$

Le problème se ramène alors à la minimisation *non contrainte* de la fonctionnelle suivante relativement aux $\mathbf{I}^{[k]}$ et aux λ_{pq} :

$$E^*(\mathcal{B}, \lambda) = E(\mathcal{B}) + \int_{\Omega} \sum_{(p,q) \in [1 \dots m]} \lambda_{pq} (\mathbf{I}^{[p]} \cdot \mathbf{I}^{[q]} - \delta_{pq}) d\Omega$$

Notons que les équations $\mathbf{I}^{[p]} \cdot \mathbf{I}^{[q]} = \delta_{pq}$ et $\mathbf{I}^{[q]} \cdot \mathbf{I}^{[p]} = \delta_{qp}$ étant symétriques, les multiplicateurs de Lagrange correspondants sont égaux : $\lambda_{pq} = \lambda_{qp}$.

Pour que le minimum soit atteint, les conditions nécessaires sont données par les équations d'Euler-Lagrange correspondantes à la fonctionnelle $E^*(\mathcal{B}, \lambda)$:

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{[k]} + 2 \sum_{l=1}^m \lambda_{lk} \mathbf{I}^{[l]} = 0 & (a) \\ \mathbf{I}^{[p]} \cdot \mathbf{I}^{[q]} = \delta_{pq} & (k, p, q \in [1 \dots m]) \quad (b) \end{cases} \quad (5)$$

On peut facilement trouver les λ_{lk} atteints au minimum dans ce cas : Les produits scalaires entre les m premières équations (5a) avec chaque vecteur $\mathbf{I}^{[p]}$ ($p \in [1 \dots m]$) se simplifient grâce aux relations d'orthogonalité (5b) :

$$\forall k, l \in [1 \dots m], \quad \lambda_{kl} = - \frac{\mathcal{L}^{[k]} \cdot \mathbf{I}^{[l]}}{2}$$

Finalement, on élimine les λ_{lk} en les remplaçant dans (5a), et on obtient la descente de gradient *qui minimise la fonctionnelle (4) tout en préservant les contraintes orthonormales* :

$$\frac{\partial \mathbf{I}^{[k]}}{\partial t} = - \mathcal{L}^{[k]} + \sum_{l=1}^m \left(\mathcal{L}^{[l]} \cdot \mathbf{I}^{[k]} \right) \mathbf{I}^{[l]} \quad (6)$$

où

$$\mathcal{L}_i^{[k]} = \alpha (I_i^{[k]} - I_{i_0}^{[k]}) - \operatorname{div} \left(\frac{\Phi'(\|\nabla \mathbf{I}^{[k]}\|)}{\|\nabla \mathbf{I}^{[k]}\|} \nabla I_i^{[k]} \right)$$

Cette équation contrainte (6) est un ensemble de m EDP vectorielles couplées (soit $m \times n$ équations scalaires), qui permet de régulariser tout champ d'ensemble de vecteurs orthonormés \mathcal{B} en préservant la structure orthonormale de ses points.

Remarque 1 : Le $k^{\text{ième}}$ vecteur Lagrangien $\mathcal{L}^{[k]}$ de la fonctionnelle non contrainte, peut être vu comme une *force de diffusion pure agissant sur le vecteur $\mathbf{I}^{[k]}$* (une interprétation physique est proposée en section 5.2). Notons également la séparation nette dans l'EDP (6) entre ce Lagrangien non contraint et le terme de couplage permettant le respect de l'orthonormalité. Cette approche permet donc de généraliser le choix de la Φ -fonctionnelle pour d'autres problèmes que celui de la régularisation de données (recalage de champs de rotations, flots optiques, etc...)

Remarque 2 : L'EDP (6) préserve naturellement la propriété de configuration *directe* ou *indirecte* des ensembles orthonormés traités. L'évolution étant continue, aucun renversement de configuration n'apparaît. Cela implique notamment que les matrices de rotation ne peuvent pas se transformer en roto-inversions (voir section 5.3).

Remarque 3: Dans le cas des bases orthonormées nD (lorsque $m = n$), l'EDP (6) peut s'écrire sous une *forme matricielle* simple :

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \mathbf{R} \mathbf{L}^T \mathbf{R} - \mathbf{L} \quad (7)$$

où \mathbf{R} et \mathbf{L} sont les matrices dont les $k^{\text{ième}}$ colonnes sont respectivement données par les vecteurs $\mathbf{I}^{[k]}$ et $\mathcal{L}^{[k]}$.

$$\mathbf{R} = \left(\mathbf{I}^{[1]} \mid \dots \mid \mathbf{I}^{[n]} \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{L} = \left(\mathcal{L}^{[1]} \mid \dots \mid \mathcal{L}^{[n]} \right)$$

L'EDP matricielle (7) permet donc de restaurer des champs de matrices orthogonales en respectant la contrainte d'orthogonalité. Nous développerons plus particulièrement le cas de matrices orthogonales 3×3 , en section 5.

4 Diffusion de vecteurs unitaires

La diffusion par EDP de champs de vecteurs unitaires (ou vecteurs de direction) a été étudiée récemment [4, 9, 21, 43, 47]. Nous montrons ici que ce problème peut être vu comme un cas particulier simple de notre formalisme agissant sur des ensemble orthonormés \mathcal{B} , lorsque ces ensembles sont réduits à *un seul vecteur* $\mathcal{B}(M) = \{\mathbf{I}(M)\}$ ($m = 1$). En effet, les contraintes orthonormales (1) se réduisent alors à la contrainte de norme : $\forall M \in \Omega, \|\mathbf{I}(M)\| = 1$. La fonctionnelle (4) à minimiser est dans ce cas :

$$E(\mathbf{I}) = \int_{\Omega} [\alpha \|\mathbf{I} - \mathbf{I}_0\|^2 + \Phi(\|\nabla \mathbf{I}\|)] d\Omega$$

et l' EDP de diffusion contrainte (6) correspondante est :

$$\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} = (\mathcal{L} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} - \mathcal{L} \quad (8)$$

où $\mathcal{L}_i = \alpha (I_i - I_{i0}) - \text{div} \left(\frac{\Phi'(\|\nabla \mathbf{I}\|)}{\|\nabla \mathbf{I}\|} \nabla I_i \right)$.

Cette équation peut être simplifiée. A partir de la dérivation spatiale de $\|\mathbf{I}(M)\|^2 = 1$ dans \mathbb{R}^p , on trouve :

$$\forall a \in [1 \dots p], \quad \mathbf{I} \cdot \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial x_a} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \mathbf{I} \cdot \mathbf{I} = -\|\nabla \mathbf{I}\|^2 \quad (9)$$

En développant l'opérateur divergence dans \mathcal{L}_i :

$$\text{div}(A \nabla I_i) = A \Delta I_i + \nabla A \cdot \nabla I_i$$

où $A = \frac{\Phi'(\|\nabla \mathbf{I}\|)}{\|\nabla \mathbf{I}\|}$. On a alors, en notant \mathbf{d} le vecteur de composantes $d_i = \text{div}(A \nabla I_i)$, avec $i = 1 \dots n$:

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{I} = A \Delta \mathbf{I} \cdot \mathbf{I} + \sum_{a=1}^p (\nabla A)_a \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial x_a} \cdot \mathbf{I}$$

Les expressions (9) permettent la simplification :

$$(\text{div}(A \nabla I_i)) \cdot \mathbf{I} = -\Phi'(\|\nabla \mathbf{I}\|) \|\nabla \mathbf{I}\|$$

et l'EDP de régularisation à norme contrainte (8) devient :

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} = \begin{cases} \text{div} \left(\frac{\Phi'(\|\nabla \mathbf{I}\|)}{\|\nabla \mathbf{I}\|} \nabla I_i \right) + \Phi'(\|\nabla \mathbf{I}\|) \|\nabla \mathbf{I}\| I_i \\ + \alpha (I_{i0} - (\mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{I}) I_i) \end{cases} \quad (10)$$

Cette EDP de diffusion régularise des champs de vecteur unitaires, en utilisant des Φ -fonctionnelles générales. Notons que les EDP proposées dans [4, 9, 43] sont une restriction de cette équation (10) à

$$\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \Phi(s) = s^r \quad (r = 1,2)$$

Notre méthode de régularisation d'ensemble orthonormés permet d'unifier élégamment les précédents travaux sur la diffusion de vecteurs unitaires, en les englobant dans un formalisme contraint plus général. En section 6, deux applications de diffusion à norme unitaire sont présentées : la restauration de vecteurs directions, ainsi que la suppression du bruit chromatique dans des images couleurs.

5 Régularisation de bases 3D orthonormées

5.1 Notations et équations 3D

Nous nous intéressons maintenant au cas particulier de la régularisation de *champs bruités de bases orthonormées 3D* (ou de matrices orthogonales 3×3 , $m = n = 3$). Pour des raisons de clarté, nous noterons les trois vecteurs de ces bases par :

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}^{[1]}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{I}^{[2]} \quad \text{et} \quad \mathbf{K} = \mathbf{I}^{[3]} \quad \text{et} \quad \text{donc} \quad \mathcal{B} = \{ \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K} \}$$

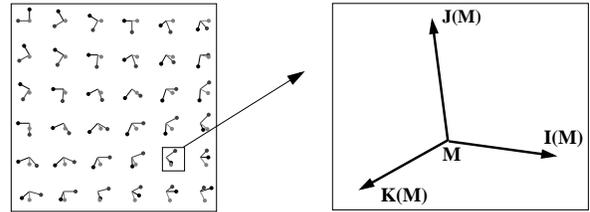


FIG. 3 – Exemple d'un champ de bases 3D orthonormées.

Pour régulariser ces champs, nous minimisons la fonctionnelle (4), qui devient, pour trois vecteurs :

$$E(\mathcal{B}) = \int_{\Omega} \frac{\alpha}{2} (\|\mathbf{I} - \mathbf{I}_0\|^2 + \|\mathbf{J} - \mathbf{J}_0\|^2 + \|\mathbf{K} - \mathbf{K}_0\|^2) + \Phi(\|\nabla \mathbf{I}\|) + \Phi(\|\nabla \mathbf{J}\|) + \Phi(\|\nabla \mathbf{K}\|) d\Omega$$

L'équation (6) nous donne les trois descentes de gradient 3D correspondantes, qui respectent les contraintes orthonormales (1) des structures \mathcal{B} :

$$\begin{cases} \mathbf{I}_t = \mathbf{f}^{\mathbf{I}} - (\mathbf{f}^{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} - (\mathbf{f}^{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{J} - (\mathbf{f}^{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{K} \\ \mathbf{J}_t = \mathbf{f}^{\mathbf{J}} - (\mathbf{f}^{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{I} - (\mathbf{f}^{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{J} - (\mathbf{f}^{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{K} \\ \mathbf{K}_t = \mathbf{f}^{\mathbf{K}} - (\mathbf{f}^{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{K}) \mathbf{I} - (\mathbf{f}^{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{K}) \mathbf{J} - (\mathbf{f}^{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{K}) \mathbf{K} \end{cases} \quad (11)$$

où \mathbf{f}^u est le vecteur Lagrangien de la fonctionnelle non-contrainte associé au vecteur \mathbf{u} :

$$f_i^u = \alpha (u_{i_0} - u_i) + \operatorname{div} \left(\frac{\Phi'(\|\nabla \mathbf{u}\|)}{\|\nabla \mathbf{u}\|} \nabla u_i \right) \quad (12)$$

5.2 Une interprétation physique

Chaque point $\mathcal{B}(M) = \{ \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K} \}$ du champ \mathcal{B} peut être vu comme un objet solide composé de trois tiges \mathbf{I} , \mathbf{J} et \mathbf{K} de longueurs unitaires et orthogonales entre elles, *fixées au même point M*, et soumises respectivement à des forces $\mathbf{f}^{\mathbf{I}}$, $\mathbf{f}^{\mathbf{J}}$ et $\mathbf{f}^{\mathbf{K}}$ (Fig.4).

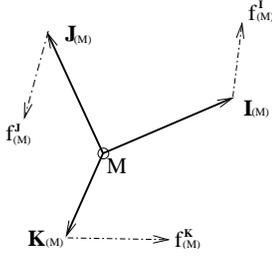


FIG. 4 – Un objet solide $\mathcal{B}(M)$, soumis à des forces.

Etant fixé en M , le seul mouvement que peut effectuer cet objet est une rotation autour du point M : Chaque force $\mathbf{f}^{\mathbf{I}}$, $\mathbf{f}^{\mathbf{J}}$ et $\mathbf{f}^{\mathbf{K}}$ induit un moment mécanique sur cet objet :

$$\Omega_{\mathbf{I}} = \mathbf{I} \times \mathbf{f}^{\mathbf{I}}, \quad \Omega_{\mathbf{J}} = \mathbf{J} \times \mathbf{f}^{\mathbf{J}}, \quad \text{et} \quad \Omega_{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \times \mathbf{f}^{\mathbf{K}}$$

où \times désigne le produit vectoriel usuel de \mathbb{R}^3 . Le moment mécanique total subit par l'objet \mathcal{B} est donc :

$$\Omega = \Omega_{\mathbf{I}} + \Omega_{\mathbf{J}} + \Omega_{\mathbf{K}} = (\mathbf{I} \times \mathbf{f}^{\mathbf{I}}) + (\mathbf{J} \times \mathbf{f}^{\mathbf{J}}) + (\mathbf{K} \times \mathbf{f}^{\mathbf{K}})$$

Si nous supposons que son moment d'inertie est unitaire, nous pouvons exprimer les vitesses $\mathbf{v}^{\mathbf{I}}$, $\mathbf{v}^{\mathbf{J}}$ et $\mathbf{v}^{\mathbf{K}}$ de chaque extrémité des tiges, correspondantes au *mouvement contraint de rotation* que subit ce solide :

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{\mathbf{I}} = \Omega \times \mathbf{I} \\ \mathbf{v}^{\mathbf{J}} = \Omega \times \mathbf{J} \\ \mathbf{v}^{\mathbf{K}} = \Omega \times \mathbf{K} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \Omega = \mathbf{I} \times \mathbf{f}^{\mathbf{I}} + \mathbf{J} \times \mathbf{f}^{\mathbf{J}} + \mathbf{K} \times \mathbf{f}^{\mathbf{K}}$$

En utilisant $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{w}$ (formule du double produit vectoriel) et $\mathbf{I}^{[l]} \cdot \mathbf{I}^{[k]} = \delta_{kl}$ (propriétés orthonormales de l'objet \mathcal{B}), l'expression de ces vitesses devient :

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{\mathbf{I}} = \mathbf{f}^{\mathbf{I}} - (\mathbf{f}^{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} - (\mathbf{f}^{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{J} - (\mathbf{f}^{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{K} \\ \mathbf{v}^{\mathbf{J}} = \mathbf{f}^{\mathbf{J}} - (\mathbf{f}^{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{I} - (\mathbf{f}^{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{J} - (\mathbf{f}^{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{K} \\ \mathbf{v}^{\mathbf{K}} = \mathbf{f}^{\mathbf{K}} - (\mathbf{f}^{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{K}) \mathbf{I} - (\mathbf{f}^{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{K}) \mathbf{J} - (\mathbf{f}^{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{K}) \mathbf{K} \end{cases}$$

Une vitesse étant une variation infinitésimale dans le temps,

$$\mathbf{v}^{\mathbf{I}} = \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t}, \quad \mathbf{v}^{\mathbf{J}} = \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}, \quad \mathbf{v}^{\mathbf{K}} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t}$$

En exprimant les forces \mathbf{f}^u par (12), nous retrouvons l'EDP de régularisation avec contraintes orthonormales (11) : La

fonctionnelle (4) peut donc être vue comme une énergie mécanique associée à un objet rigide \mathcal{B} , soumis à trois *forces de diffusion pures* \mathbf{f}^u . Les EDP obtenues sont alors les expressions des rotations instantanées appliquées à l'objet \mathcal{B} de façon à minimiser cette énergie mécanique. Un schéma numérique simple découle de cette interprétation :

$$\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} = \Omega \times \mathbf{I} \quad \implies \quad \mathbf{I}_{(t+dt)} = \mathcal{R}_{\Omega dt}(\mathbf{I}_{(t)})$$

où $\mathcal{R}_{\Omega dt}$ est la rotation infinitésimale donnée par le vecteur rotation Ωdt . Celle ci est appliquée de la même manière aux vecteurs \mathbf{J} et \mathbf{K} . Respecter le type de mouvement subit par \mathcal{B} (ici une rotation), permet de préserver numériquement les contraintes orthonormales (voir aussi [48]).

5.3 Régularisation de mouvement de caméra

Supposons que nous voulions régulariser un mouvement estimé de caméra 3D. Le principe en est le suivant : Un premier algorithme estime la trajectoire d'une caméra 3D à partir d'une séquence vidéo 2D réelle (par des méthodes classiques d'estimation de mouvement [16]). Il en ressort deux séquences :

$$\mathcal{T}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \mathcal{R}(t) : \mathbb{R} \rightarrow SO(3)$$

\mathcal{T} correspond au mouvement de translation de la caméra (changement du point de vue dans le temps), et \mathcal{R} , au mouvement de rotation de la caméra (changement de l'angle de vue dans le temps). Dans la mesure où ces estimations sont réalisées à partir de points de correspondances entre les images (qui sont donc relativement sensibles au bruit), les séquences \mathcal{R} et \mathcal{T} obtenues peuvent être bruitées et un processus de restauration du mouvement estimé est alors nécessaire (Fig.5).

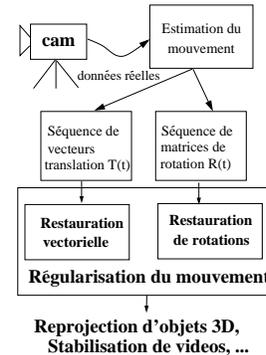


FIG. 5 – Régularisation d'un mouvement de caméra

La séquence de translation $\mathcal{T} = (Tx, Ty, Tz)$ peut être restaurée en utilisant des méthodes classiques de diffusion de champs de vecteurs non contraints (comme par exemple, l'équation (3), mais aussi [6, 20, 40, 42, 46, 47, 51]).

La séquence de rotation \mathcal{R} nécessite plus d'attention. Pour la restaurer, une première idée serait de la décomposer en données facilement régularisable, comme par exemple des

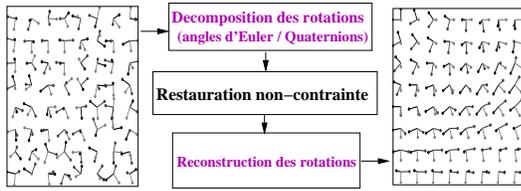


FIG. 6 – Décomposer les rotations pour la régularisation ?

angles d'Euler ou des quaternions (Fig.6). Malheureusement, cette conversion peut introduire des erreurs numériques, et donc rajouter du bruit. Mais surtout, la représentation d'une rotation par angle d'Euler ou par quaternion n'est pas unique, ce qui implique qu'une telle décomposition peut introduire des discontinuités indésirables, même si la champ initial des rotations est parfaitement continu.

La Fig.7 illustre ce problème en présentant deux séquences 1D d'angles d'Euler qui représentent la même séquence de rotation. Des EDP de diffusion anisotrope agissant sur ces angles d'Euler auront tendance à préserver les discontinuités dans le cas (7b), et introduire ainsi un biais dans le processus de régularisation.

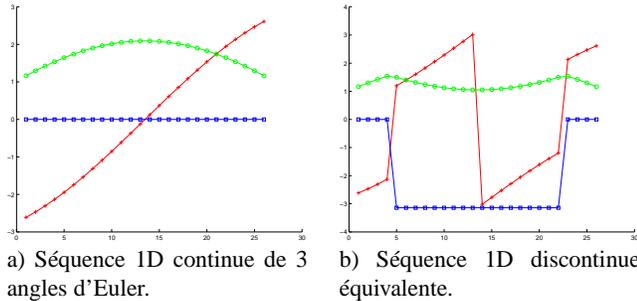


FIG. 7 – Illustration de la non-unicité de la décomposition des rotations 3D en angles d'Euler.

Notre formalisme permet d'éviter ce problème. En effet, une rotation \mathbf{R} est une matrice 3×3 orthogonale directe, qui rentre donc dans notre cadre de régularisation de vecteurs orthonormés : l'équation matricielle contrainte (7) peut ainsi restaurer la séquence \mathcal{R} , en agissant directement sur les matrices de rotation, sans aucune conversion de données (Fig.8).

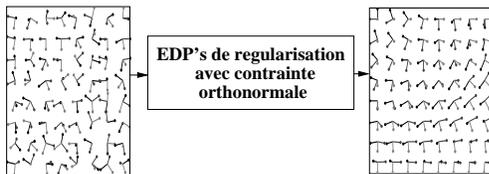


FIG. 8 – Une méthode matricielle de restauration de champs de rotations.

Une application est par exemple d'utiliser le mouvement de caméra restauré pour reprojeter plus vraisemblablement

des objets 3D virtuels dans une scène réelle, ou pour stabiliser une séquence vidéo (application dans le domaine de la post-production). Notons que notre EDP matricielle contrainte (7) permet de régulariser plus généralement un champ de matrice de rotation n -D.

5.4 Restauration d'images IRMd

L'imagerie IRMd est une technique médicale récente d'acquisition in-vivo qui permet d'analyser l'ensemble des fibres de la matière blanche du cerveau. Chaque point d'un volume IRMd $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_n(3)$ est un tenseur de diffusion $\mathbf{T} = (T_{i,j})$ qui est une matrice 3×3 symétrique semi-définie-positive :

$$T_{i,j} = T_{j,i} \quad \text{et} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, (\mathbf{T} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \geq 0 \quad (13)$$

Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et les vecteurs propres $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ de \mathbf{T} sont données par une décomposition spectrale :

$$\mathbf{T} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^T = \lambda_1 \mathbf{I} \mathbf{I}^T + \lambda_2 \mathbf{J} \mathbf{J}^T + \lambda_3 \mathbf{K} \mathbf{K}^T \quad (14)$$

où \mathbf{U} est une matrice orthogonale 3×3 dont chaque colonne est un vecteur propre de \mathcal{T} ,

$$\mathbf{U} = (\mathbf{I} \mid \mathbf{J} \mid \mathbf{K})$$

et $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est la matrice diagonale des valeurs propres correspondantes. Les contraintes de symétrie et de semi-positivité du tenseur se traduisent simplement en terme spectral :

$$\begin{cases} \text{Semi-positivité :} & \forall i, \quad \lambda_i \geq 0 \\ \text{Symétrie :} & \forall k, l, \quad \mathbf{I}^{[k]} \cdot \mathbf{I}^{[l]} = \delta_{k,l} \end{cases} \quad (15)$$

La représentation de ces tenseurs de diffusion se fait donc souvent à l'aide d'ellipsoïdes dont les axes (orthogonaux) et les rayons (positifs) sont donnés respectivement par les vecteurs propres \mathbf{I}, \mathbf{J} et \mathbf{K} et les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (Fig.9).

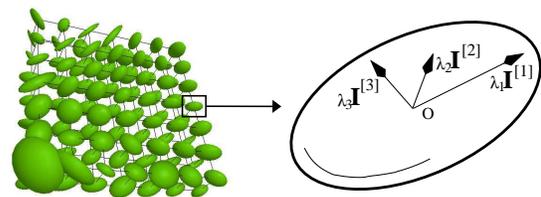


FIG. 9 – Représentation d'un champ de tenseurs IRMd.

Ces éléments propres sont intéressants pour l'imagerie IRMd : Les valeurs propres sont liées aux vitesses de diffusion (*diffusivités*) des molécules d'eau dans les fibres de la matière blanche, tandis que les vecteurs propres sont associés aux orientations 3D de ces diffusions. Ils sont donc des indicateurs locaux de la structure géométriques des fibres : beaucoup d'algorithmes de suivi de fibres [14, 50] sont par exemple basés sur la direction principale $\mathbf{I}^{[1]}$ des tenseurs.

L'imagerie IRMd étant relativement nouvelle, les images acquises sont bruitées, et un processus de régularisation est souhaitable avant de travailler sur ces données. Pour cela, nous proposons de régulariser séparément les diffusivités (matrice \mathbf{D}) et les orientations (matrice \mathbf{U}) des tenseurs. La justification de cette régularisation séparée des éléments propres, plutôt que l'utilisation d'une EDP tensorielle, a été abordée dans [48] : La diffusion directe des coefficients tensoriels semble poser le problème de la perte de l'information d'orientation des tenseurs (comparer ces différentes méthodes de régularisations tensorielles est l'objet d'un prochain rapport de recherche).

a) Régularisation des diffusivités tensorielles :

Le champ de diffusivités \mathbf{D} est vu comme un champ de vecteur $\lambda : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\forall M \in \Omega, \quad \lambda(M) = (\lambda_1(M), \lambda_2(M), \lambda_3(M))$$

et il est donc régularisé grâce à des EDP de diffusion vectorielles non-contraintes [6, 20, 40, 42, 46, 47, 51], qui vérifient le principe du minimum et du maximum [3], et assurent par la même la positivité des diffusivités.

b) Régularisation des orientations tensorielles :

Le champ des matrices \mathbf{U} représentant les orientations des tenseurs est composé de matrices 3×3 orthogonales (matrices dont les vecteurs colonnes forment une base orthonormale). On peut donc les débruiter en utilisant notre équation de diffusion matricielle à contrainte orthonormale (7) sur le champ \mathbf{U} de la même façon que nous l'avons fait pour les matrices de rotation 3D (section 5.3). Cependant, lors de la décomposition d'un tenseur de diffusion, on doit considérer la non-unicité de la représentation spectrale :

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \mathbf{I}^{[k]} \mathbf{I}^{[k]T}$$

Inverser la direction d'un vecteur propre, tout en conservant son orientation (c-à-d considérer $-\mathbf{I}^{[l]}$ au lieu de $\mathbf{I}^{[l]}$) donne exactement le même tenseur après recombinaison : Il y a en fait 2^n possibilités pour représenter l'orientation \mathbf{U} d'un tenseur.

Pour éviter ce problème, nous proposons un réalignement local des vecteurs propres \mathbf{I}, \mathbf{J} et \mathbf{K} avant d'appliquer l'EDP contrainte (7) en un point précis du champ \mathbf{U} d'orientation de tenseurs : L'idée est d'aligner la direction de tous les vecteurs voisins avec la direction du vecteur courant. Pour cela, on minimise leur angle relatif en inversant les vecteurs voisins dont le produit scalaire avec le vecteur courant est négatif (voir également [14] pour une méthode analogue dans le cas d'un seul vecteur) :

$$\forall N \in \mathcal{V}(M), \quad \tilde{\mathbf{I}}^{[i]}(N) = \text{sign} \left(\mathbf{I}^{[i]}(N) \cdot \mathbf{I}^{[i]}(M) \right) \mathbf{I}^{[i]}(N)$$

où $\mathcal{V}(M)$ est un voisinage de M .

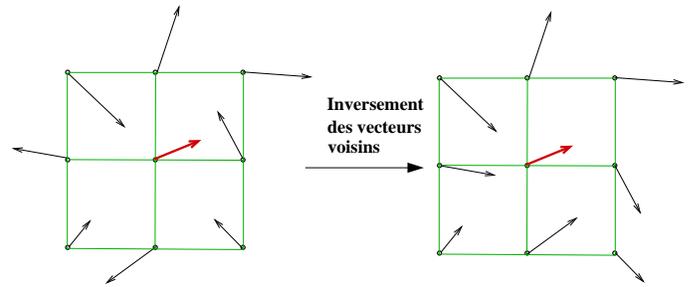


FIG. 10 – Procédure d'alignement local pour un vecteur.

Cette étape locale, illustrée en Fig.10 permet à l'EDP (7) d'agir uniquement sur les orientations des vecteurs propres, en négligeant l'information de la direction (qui n'a pas de sens particulier dans le cas des tenseurs, puisqu'elle est dépendante de l'algorithme de décomposition spectrale).

6 Résultats

Nous avons appliqué l'ensemble des équations (6), (11), (10), (7) de notre formalisme de régularisation de vecteurs orthonormés à une grande variété de problèmes. La fonctionnelle utilisée a été $\Phi(s) = 2 \sqrt{1 + s^2} - 2$, appelée aussi 'hypersurface', qui préserve bien les discontinuités tout en lissant isotropiquement les zones homogènes.

- *Restauration de champs de vecteurs directions bruités :* (Fig.11.1) l'algorithme est illustré par le débruitage d'un champ synthétique 2D de vecteurs unitaires (bruit gaussien de variance $\sigma = 30^\circ$ sur les angles polaires) en utilisant notre EDP à norme contrainte (10).

- *Suppression de bruit chromatique d'une image couleur :* (Fig.11.2). L'EDP (10) permet également de régulariser les vecteurs chromatique dans les images *RGB* (c-à-d le vecteur unitaire $(R,G,B)/\sqrt{R^2 + G^2 + B^2}$ (voir également [9, 43, 47]). La connaissance d'un type de bruit chromatique assure une restauration plus détaillée qu'avec une EDP non contrainte de diffusion vectorielle (ici pour comparaison Fig.11.2b, avec la même fonctionnelle (2)).

- *Régularisation de champs de matrices de rotation :* L'EDP de diffusion contrainte (11) agit directement sur les matrices de rotation, sans aucune conversion de données (section 5.3). On peut donc l'utiliser dans le but de débruiter des mouvements de rotation de caméra. La Fig.11.3 illustre la régularisation d'une séquence 1D de rotation estimée à partir d'une vidéo réelle (fournie par la société REALVIZ), tandis que la Fig.11.4 illustre l'application au cas plus général d'un champ 2D de rotations 3D.

- *Débruitage d'images IRMd* (Fig.11.5) :

La figure 11.5 montre l'application de la régularisation sur un volume IRMd réel (fourni par le SHFJ du CEA) : la partie de gauche représente chaque tenseur sous forme d'el-

lipsoïde, la partie de droite montre un suivi des directions principales $\mathbf{I}^{[1]}$ des tenseurs (donc une orientation estimée des fibres). Les EDP de régularisation (11) sont respectivement appliqués sans étape de réaligement local (Fig.11.5b), et avec réaligement local (Fig.11.5c), cette dernière méthode permettant de considérer seulement l'orientation des vecteurs propres des tenseurs et non leur direction (Fig.11.5b). Les fibres ainsi obtenues sont en quelque sorte 'peignées' par la régularisation du volume IRMd.

Conclusion

Dans cet article, nous avons étudié le problème de la régularisation d'images d'ensemble de vecteur orthonormés, avec préservation des discontinuités. Nous avons formulé ce problème dans un cadre variationnel général, basé sur une minimisation contrainte de Φ -fonctionnelle, où les discontinuités et les contraintes orthonormales sont préservées grâce à des EDP anisotropes couplées. L'importance de ces contraintes et l'interprétation des équations résultantes ont été clairement montrés. Nous avons ainsi pu étendre naturellement les précédents travaux sur l'évolution des champs de vecteurs unitaires à des Φ -fonctionnelles quelconques. Deux applications originales plus particulières à notre formalisme ont été proposées et illustrées : la restauration de mouvement estimé de caméra, ainsi que le débruitage d'images IRMd.

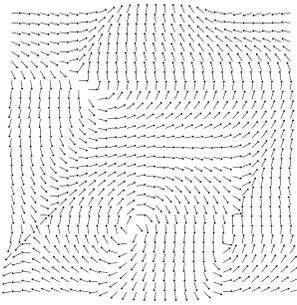
Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier chaleureusement J.F Mangin du SHFJ-CEA, I. Zoghlami et J. Bride de la société Realviz (<http://www.realviz.com>), ainsi que O. Faugeras, T. Papadopoulo et C. Chef d'hotel de l'équipe ROBOTVIS pour leur cordiale collaboration et leurs conseils avisés.

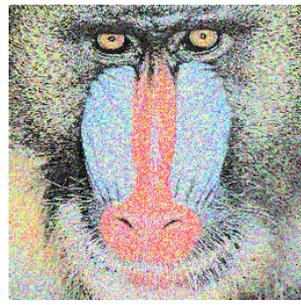
Références

- [1] L. Alvarez, P.L. Lions, and J.M. Morel. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion (II). *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 29:845–866, 1992.
- [2] Luis Alvarez, Rachid Deriche, Joaquim Weickert, and Javier Sanchez. Dense disparity map estimation respecting image discontinuities: A pde and scale-space based approach. *International Journal of Visual Communication and Image Representation, Special Issue on Partial Differential Equations in Image Processing, Computer Vision and Computer Graphics*, 2000. To appear in 2001.
- [3] Bart M. ter Haar Romeny. *Geometry-driven diffusion in computer vision*. Computational imaging and vision. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [4] M. Bertalmio, L.T. Cheng, S. Osher, and G. Sapiro. Variational problems and partial differential equations on implicit surfaces: The framework and examples in image processing and pattern formation. *UCLA Research Report*, June 2000.
- [5] M. Bertalmio, G. Sapiro, V. Caselles, and C. Ballester. Image inpainting. In Kurt Akeley, editor, *Proceedings of the SIGGRAPH*, pages 417–424. ACM Press, ACM SIGGRAPH, Addison Wesley Longman, 2000.
- [6] P. Blomgren and T.F. Chan. Color tv: Total variation methods for restoration of vector-valued images. *IEEE Trans. Imag. Proc.*, 7(3):304–309, 1998. Special Issue on Partial Differential Equations and Geometry-Driven Diffusion in Image Processing and Analysis.
- [7] V. Caselles, J.M. Morel, G. Sapiro, and A. Tannenbaum. Introduction to the special issue on partial differential equations and geometry-driven diffusion in image processing and analysis. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3):269–273, 1998.
- [8] A. Chambolle and P.L. Lions. Image recovery via total variation minimization and related problems. *Numerische Mathematik*, 76(2):167–188, 1997.
- [9] T. Chan and J. Shen. Variational restoration of non-flat image features : Models and algorithms. *Research Report. Computational and applied mathematics department of mathematics Los Angeles.*, June 1999.
- [10] T. Chan and J. Shen. Non-texture inpaintings by curvature-driven diffusions (cdd). Technical Report 00-35, Department of Mathematics, UCLA, Los Angeles, September 2000.
- [11] P. Charbonnier, G. Aubert, M. Blanc-Féraud, and M. Barlaud. Two deterministic half-quadratic regularization algorithms for computed imaging. In *Proceedings of the International Conference on Image Processing*, volume II, pages 168–172, 1994.
- [12] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, and M. Barlaud. Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(2):298–311, 1997.
- [13] L. Cohen. Auxiliary variables and two-step iterative algorithms in computer vision problems. *International Conference on Computer Vision*, 1995.
- [14] O. Coulon, D.C. Alexander, and S.R. Arridge. A regularization scheme for diffusion tensor magnetic resonance images. In *XVIIth International Conference on Information Processing in Medical Imaging*, 2001.
- [15] F. Dibos and G. Koepfler. Global total variation minimization. Technical Report 9801, CEREMADE (URA CNRS 749), January 1998.
- [16] O. Faugeras, Q.T. Luong, and T. Papadopoulo. *The Geometry of Multiple Images*. MIT Press, 2001.
- [17] M. A. Förstner and E. Gülch. A fast operator for detection and precise location of distinct points, corners and centers of circular features. In *Proceedings of the Intercommission Workshop of the International Society for Photogrammetry and Remote Sensing*, Interlaken, Switzerland, 1987.
- [18] S. Geman and D.E. McClure. Bayesian image analysis: an application to single photon emission tomography. *Amer. Statist. Assoc.*, pages 12–18, 1985.
- [19] G.H. Granlund and H. Knutsson. *Signal Processing for Computer Vision*. Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [20] R. Kimmel, R. Malladi, and N. Sochen. Images as embedded maps and minimal surfaces: movies, color, texture, and volumetric medical images. *International Journal of Computer Vision*, 39(2):111–129, September 2000.
- [21] R. Kimmel and N. Sochen. Orientation diffusion or how to comb a porcupine. Technical Report 2000-02, CIS, 2000. Accepted to special issue on PDEs in Image Processing,

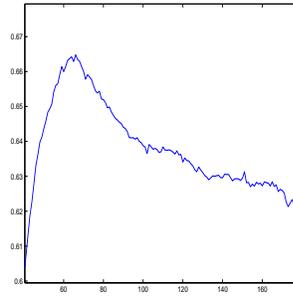
- Computer Vision, and Computer Graphics, *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2000.
- [22] P. Kornprobst, R. Deriche, and G. Aubert. Image coupling, restoration and enhancement via PDE's. In *Proceedings of the International Conference on Image Processing*, volume 4, pages 458–461, Santa Barbara, California, October 1997.
- [23] P. Kornprobst, R. Deriche, and G. Aubert. Nonlinear operators in image restoration. In *Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 325–331, Puerto Rico, June 1997. IEEE Computer Society, IEEE.
- [24] P. Kornprobst, R. Deriche, and G. Aubert. EDP, débruitage et réhaussement en traitement d'image: Analyse et contributions. In *11ème Congrès RFIA*, volume 1, pages 277–286. AFCET, January 1998.
- [25] Denis Le Bihan. Methods and applications of diffusion mri. In I.R. Young, editor, *Magnetic Resonance Imaging and Spectroscopy in Medicine and Biology*. John Wiley and Sons, 2000.
- [26] Tony. Lindeberg. *Scale-Space Theory in Computer Vision*. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [27] R. Malladi and J.A. Sethian. Image processing: Flows under min/max curvature and mean curvature. *Graphical Models and Image Processing*, 58(2):127–141, March 1996.
- [28] J.M. Morel and S. Solimini. Segmentation of images by variational methods: A constructive approach. *Rev. Math. Univ. Complut. Madrid*, 1:169–182, 1988.
- [29] D. Mumford and J. Shah. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 42:577–684, 1989.
- [30] M. Nikolova and M. Ng. Fast image reconstruction algorithms combining half-quadratic regularization and preconditioning. In *Proceedings of the International Conference on Image Processing*. IEEE Signal Processing Society, 2001.
- [31] N. Nordström. Biased anisotropic diffusion - a unified regularization and diffusion approach to edge detection. *Image and Vision Computing*, 8(11):318–327, 1990.
- [32] P. Perona. Orientation diffusions. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3):457–467, March 1998.
- [33] P. Perona and J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7):629–639, July 1990.
- [34] M. Proesmans, E. Pauwels, and L. Van Gool. *Coupled Geometry-Driven Diffusion Equations for Low-Level Vision*, pages 191–228. In ter Haar Romeny [3], 1994.
- [35] N. Rougon and F. Prêteux. Représentations multi-échelles génériques par diffusion anisotrope contrôlée. In *10ème Congrès Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle, Rennes*, volume 1, pages 289–298, January 1996.
- [36] L. Rudin and S. Osher. Total variation based image restoration with free local constraints. In *Proceedings of the International Conference on Image Processing*, volume I, pages 31–35, 1994.
- [37] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60:259–268, 1992.
- [38] G. Sapiro. *Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis*. Cambridge University Press, 2001.
- [39] G. Sapiro and V. Caselles. Contrast enhancement via image evolution flows. *Graphical Models and Image Processing*, 59(6):407–416, 1997.
- [40] G. Sapiro and D.L. Ringach. Anisotropic diffusion of multivalued images with applications to color filtering. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(11):1582–1585, 1996.
- [41] Jayant Shah. A common framework for curve evolution, segmentation and anisotropic diffusion. *International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 1996.
- [42] N. Sochen, R. Kimmel, and R. Malladi. From high energy physics to low level vision. Technical Report 39243, LBNL report, UC Berkeley, 1996.
- [43] B. Tang, G. Sapiro, and V. Caselles. Diffusion of general data on non-flat manifolds via harmonic maps theory: The direction diffusion case. *The International Journal of Computer Vision*, 36(2):149–161, February 2000.
- [44] S. Teboul, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, and M. Barlaud. Variational approach for edge-preserving regularization using coupled PDE's. *IEEE Transaction on Image Processing, Special Issue on PDE based Image Processing*, 7(3):387–397, 1998.
- [45] A.N. Tikhonov. Regularization of incorrectly posed problems. *Soviet. Math. Dokl.*, 4:1624–1627, 1963.
- [46] D. Tschumperle and R. Deriche. Restauration d'images vectorielles par EDP. In *12ème Congrès RFIA'00*, volume II, pages 247–256, Paris, February 2000.
- [47] D. Tschumperlé and R. Deriche. Constrained and unconstrained PDEs for vector image restoration. *12th Scandinavian Conf. on Image Analysis .A journal version has been submitted to Signal Processing Magazine- Special Issue on Mathematical Methods in Imaging*, pages 153–160, June 2001.
- [48] D. Tschumperlé and R. Deriche. Diffusion tensor regularization with constraints preservation. In *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Kauai Marriott, Hawaii, December 2001.
- [49] D. Tschumperle and R. Deriche. Regularization of orthogonal vector sets using coupled PDE's. *Proceedings of IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision*, pages 3–10, July 2001. Awarded as one of the three Best Paper of the Workshop- Under review to appear in IJCV - Special VLMS.
- [50] B. Vemuri, Y. Chen, M. Rao, T. McGraw, T. Mareci, and Z. Wang. Fiber tract mapping from diffusion tensor mri. In *1st IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision (VLSM'01)*, July 2001.
- [51] J. Weickert. *Anisotropic Diffusion in Image Processing*. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1998.
- [52] J. Weickert. Linear scale space has first been proposed in Japan. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 10(3):237–252, May 1999.
- [53] Y.L. You, M. Kaveh, W.Y. Xu, and A. Tannenbaum. Analysis and Design of Anisotropic Diffusion for Image Processing. In *Proceedings of the International Conference on Image Processing*, volume II, pages 497–501, November 1994.



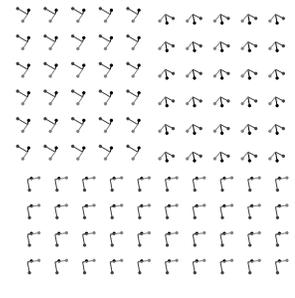
1a) Champ synthétique 2D de vecteurs direction unitaires.



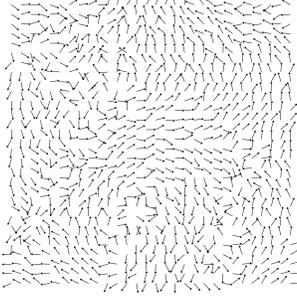
2a) Image couleur avec bruit purement chromatique.



3a) Angle d'Euler X d'un mouvement estimé de caméra.



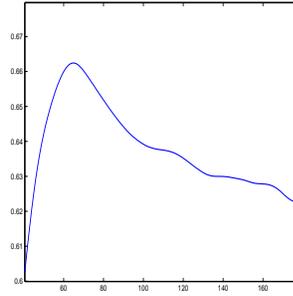
4a) Champ synthétique discontinu de rotations 3D.



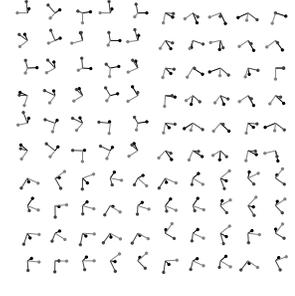
1b) Champ synthétique 2D de vecteurs unitaires bruités.



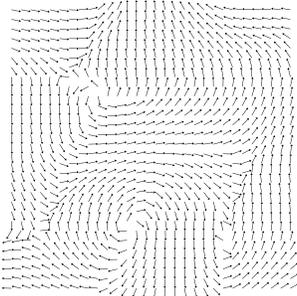
2b) Restauration couleur non-contrainte classique (éq.3, après convergence).



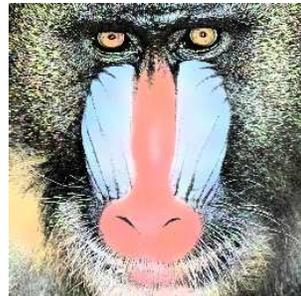
3b) Angle d'Euler X du mouvement de caméra restauré (éq.11, itération intermédiaire).



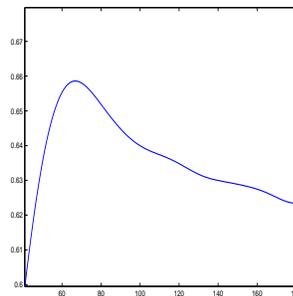
4b) Champ synthétique bruité de rotations 3D ($\sigma = 45^\circ$).



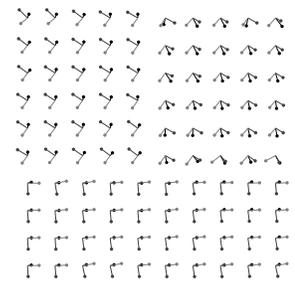
1c) Champ de vecteurs direction 2D restauré (éq.10, après convergence).



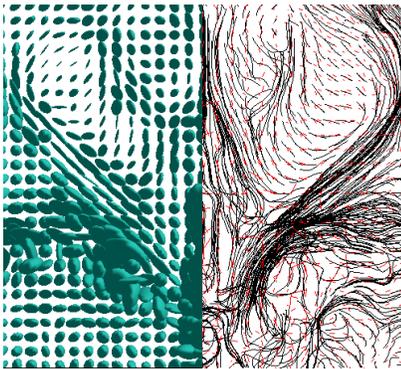
2c) Restauration de la chromaticité (éq.10, après convergence).



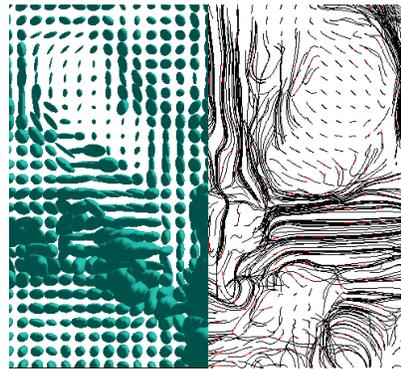
3c) Angle d'Euler X du mouvement de caméra restauré (éq.11, après convergence).



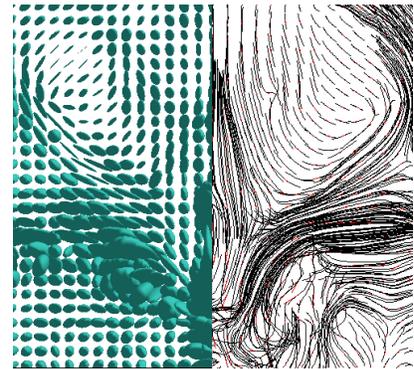
4c) Champs des rotations 3D restaurées (éq.11, après convergence).



5a) Image IRMd réelle du cerveau, avec tenseurs et directions principales.



5b) Régularisation avec éq. contrainte 11 sans alignement local, après convergence.



5c) Régularisation avec éq. contrainte 11 avec alignement local, après convergence.

FIG. 11 – Application de notre méthode de régularisation de vecteurs orthonormés : (1) Restauration d'un champ de vecteurs unitaires, (2) Restauration d'une image couleur avec bruit chromatique, (3) Régularisation d'un mouvement estimé de caméra, (4) Régularisation d'un champs 2D de matrices de rotation 3D, (5) Restauration d'images IRMd.