

Formalismes Variationnels pour l'Estimation, la Régularisation et la Visualisation d'Images IRMd

Variational formalisms for DT-MRI Estimation, Regularization and Visualization

D. Tschumperlé

R. Deriche

Projet ODYSSEE, INRIA-Sophia Antipolis,
2004 Rte des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia Antipolis

Résumé

Nous nous intéressons à trois problèmes fondamentaux rencontrés en IRMd (IRM du tenseur de diffusion) : L'estimation des champs de tenseurs, leur régularisation et la visualisation des fibres qu'ils représentent. Nous passons d'abord en revue les algorithmes déjà existants dans la littérature, basée sur des méthodes EDP, puis nous proposons un formalisme variationnel alternatif qui améliore ces méthodes, grâce à l'introduction d'importants a priori sur la forme des solutions tensorielles attendues (positivité, symétrie). Nous illustrons finalement comment notre ensemble de techniques peut être appliqué avec succès pour construire et visualiser les réseaux de fibres dans la matière blanche du cerveau, à partir d'un jeu de données bruitées brutes d'IRMd.

Mots clef

Images IRMd, Tenseurs de Diffusion, Méthodes variationnelles, Tractographie.

Abstract

We address three crucial issues encountered in DT-MRI (Diffusion Tensor Magnetic Resonance Imaging) : diffusion tensor estimation, regularization and fiber bundle visualization. We propose variational formalisms, preserving important tensor constraints (positivity, symmetry) for each of these three problems. We illustrate how our complete set of techniques can be successfully applied to construct and draw fiber bundles in the white matter of the brain, from a set of noisy raw MRI images.

Keywords

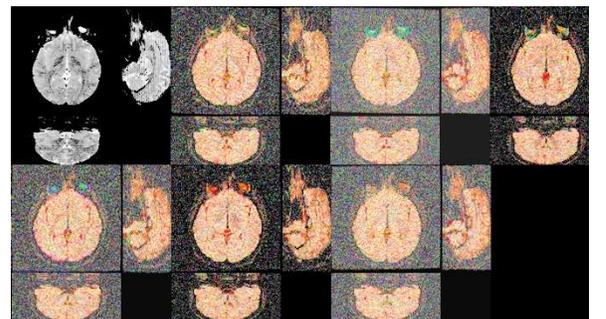
DT-MRI Imaging, Diffusion Tensors, Variational Methods, Tractography.

1 Introduction

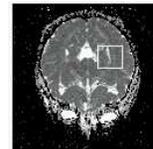
L'apparition récente de l'imagerie IRMd du tenseur de diffusion a soulevé un grand intérêt dans la communauté relative à l'imagerie médicale [2, 13]. Cette modalité d'image 3D non invasive consiste à mesurer le mouvement des molécules d'eau dans les tissus, en utilisant des techniques de résonance magnétique. Elle est basée principalement

sur l'acquisition de plusieurs images IRM brutes $S_k : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ avec différentes séquences de pulses de gradient (orientés dans au moins 6 directions différentes). Une image S_0 est également mesurée, correspondant à une image sans direction de gradient privilégié (Fig.1a). Remarquez que ces S_k peuvent être très bruitées. Cela est dû au fait que le temps d'acquisition des IRMs doit être très faible, cette contrainte entraînant fréquemment des artefacts de mesure. Cet ensemble $\{S_k, k = 0 \dots n\}$ de données brutes doit être ensuite estimé en un volume $\mathbf{T} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}(3)$ de Tenseurs de Diffusion (c-à-d de matrices 3×3 symétriques et définies-positives) qui décrivent à travers leur éléments spectraux, les diffusivités principales $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$) et les directions correspondantes $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ (orthogonales) du processus de diffusion des molécules d'eau dans les tissus comme les os, les muscles ou la matière blanche du cerveau (Fig.1b).

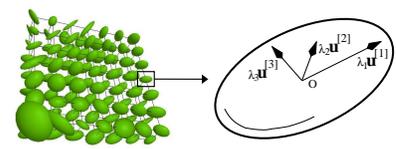
$$\forall x, y, z \in \Omega, \quad \mathbf{T}(x, y, z) = \lambda_1 \mathbf{u}\mathbf{u}^T + \lambda_2 \mathbf{v}\mathbf{v}^T + \lambda_3 \mathbf{w}\mathbf{w}^T$$



(a) Acquisitions brutes mesurées S_k ($k = 0 \dots 6$)



(b1) Diffusivité moy. = $\frac{1}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$



(b2) Partie du champ de tenseurs, représentés par des ellipsoïdes 3D.

Figure 1: Principe de l'imagerie IRMd

Selon les caractéristiques du tissu, la diffusion (et donc les

tenseurs estimés) peut être isotrope, par exemple dans les régions du liquide céphalo-rachidien, ou anisotrope comme dans la matière blanche du cerveau où la diffusion est principalement effectuée dans les directions des fibres reliant les neurones entre-eux [6, 14, 33, 34]. L'imagerie IRMd est donc particulièrement adapté pour étudier la connectivité des neurones à l'intérieur de la matière blanche, en suivant en chaque voxel la direction principale des fibres, donnée par les vecteurs propres principaux $\mathbf{u}(x, y, z)$ des tenseurs $\mathbf{T}(x, y, z)$. Récupérer ces réseaux de fibres implique en pratique de nombreux processus sous-jacents : D'abord une partie d'*estimation*, qui estime les tenseurs de diffusions (matrices 3x3) à partir des données brutes comme étant des modèles gaussiens de la diffusion des molécules d'eau. Ce champ de tenseurs estimé peut être bruité, et un processus de *régularisation de champs de tenseurs* est alors nécessaire pour améliorer le résultat de l'estimation. Finalement, les fibres doivent être calculées et *visualisées* de manière pratique, ce qui n'est pas trivial étant donné qu'elles sont la plupart du temps condensées dans une même portion d'espace.

Dans ce papier, nous proposons d'abord une revue des différentes méthodes dans la littérature pour traiter ces trois problèmes, puis nous introduisons de nouveaux formalismes variationnels qui prennent en compte d'importantes contraintes structurelles sur les tenseurs et qui s'appliquent de manière naturelle pour l'estimation, la régularisation et la visualisation des champs de tenseurs IRMd. Nous soulignons les différents avantages que possèdent nos approches sur les méthodes déjà existantes et nous illustrons comment notre ensemble de techniques peut être utilisé pour l'obtention de résultats de tractographie, à partir de jeux de données synthétiques et réels d'images IRMd du cerveau.

2 Estimation des Tenseurs

2.1 Revue des méthodes existantes

L'estimation d'un champ de tenseurs de diffusion à partir d'images IRM brutes $S_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est l'un des éléments clé de la technique de l'IRMd. Le processus d'estimation regroupe en effet toutes les informations données par les mesures physiques S_k en un champ de matrices 3×3 symétriques \mathbf{T} (tenseurs de diffusion) qui représentent des modèles gaussiens de la diffusion des molécules d'eau. Cette estimation est basée sur le respect de la relation de Stejskal-Tanner [22] :

$$\forall (x, y, z) \in \Omega, \quad S_{k(x,y,z)} = S_{0(x,y,z)} e^{g_k^T \mathbf{T}(x,y,z) g_k} \quad (1)$$

où les $g_k \in \mathbb{R}^3$ sont les vecteurs représentant les directions/magnitudes des gradients de pulses, utilisés pour l'acquisition des images correspondantes S_k . Les méthodes classiques proposées pour l'estimation des tenseurs \mathbf{T} à partir des images S_k sont les suivantes :

- **Estimation directe des tenseurs** : Les auteurs de [32]

ont proposé une solution élégante pour estimer les tenseurs \mathbf{T} directement à partir d'un jeu de données constitué de 7 images. Leur méthode repose sur la décomposition des \mathbf{T} suivant une base tensorielle orthonormée $\tilde{g}_k \tilde{g}_k^T$ calculée comme étant la base duale de $\{g_k g_k^T \mid k = 1..6\}$, la base originale utilisée pour mesurer les S_k :

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^6 \ln \left(\frac{S_0}{S_k} \right) \tilde{g}_k \tilde{g}_k^T \quad (2)$$

Malheureusement, seulement 7 images S_0, \dots, S_6 sont nécessaires et utilisées pour estimer le champ de tenseurs de diffusion \mathbf{T} . Sur la Fig.2, on remarque que ce petit nombre d'images peut être insuffisant pour une estimation robuste de \mathbf{T} , si les S_k sont très bruités.

- **Estimation au moindre carrés** : C'est la méthode la plus utilisée pour l'estimation des tenseurs de diffusion (voir par exemple [1, 18, 17]). Les tenseurs \mathbf{T} sont estimés en minimisant le critère moindre carré suivant :

$$\min_{\mathbf{T} \in \mathcal{M}_3} \sum_{k=1}^n \left(\ln \left(\frac{S_0}{S_k} \right) - g_k^T \mathbf{T} g_k \right)^2 \quad (3)$$

ce qui conduit à la résolution d'un système sur-contraint $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}$ (où \mathbf{x} est un vecteur contenant les six coefficients tensoriels inconnus $T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}, T_{yy}, T_{yz}, T_{zz}$ de \mathbf{T}). La méthode des moindre carrés est plus robuste, car toutes les n images brutes S_k (en particulier pour $n > 7$) sont utilisées pour l'estimation des tenseurs.

Remarquons cependant que ces deux méthodes ne prennent à aucun moment en compte la contrainte de *défini-positivité* des tenseurs \mathbf{T} . Dans le cas d'images bruitées S_k , rien n'empêche le processus d'estimation de calculer des tenseurs négatifs, qui n'ont aucun sens physique. En pratique, on doit vérifier que les tenseurs estimés sont effectivement positifs, et dans le cas contraire les rejeter dans l'espace des tenseurs positifs. Ceci est fait en forçant les valeurs propres négatives des tenseurs à zéro : $\tilde{\mathbf{T}}(x, y, z) \in \Omega, \quad \tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\lambda}_1 \mathbf{u}\mathbf{u}^T + \tilde{\lambda}_2 \mathbf{v}\mathbf{v}^T + \tilde{\lambda}_3 \mathbf{w}\mathbf{w}^T$, avec $\tilde{\lambda}_i = \max(0, \lambda_i)$ (Cette projection minimise la distance de Mahalanobis entre \mathbf{T} et $\tilde{\mathbf{T}}$). Remarquons aussi que ces deux méthodes d'estimation agissent uniquement point par point. Aucune interaction spatiale entre les tenseurs n'est considérée durant l'estimation.

2.2 Une approche variationnelle

Pour éviter ces inconvénients importants, nous proposons une approche variationnelle qui estime le champ de tenseur \mathbf{T} tout en introduisant des à-priori de *positivité* et de *régularité* sur la solution cherchée. Notre idée est basée sur une *minimisation contrainte* de la fonctionnelle suivante, dans l'espace des tenseurs positifs :

$$\min_{\mathbf{T} \in \mathcal{P}(3)} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \psi \left(\left| \ln \left(\frac{S_0}{S_k} \right) - g_k^T \mathbf{T} g_k \right| \right) + \alpha \phi(\|\nabla \mathbf{T}\|) d\Omega \quad (4)$$

où $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction permettant une estimation robuste des tenseurs (contrairement au terme moindre carré classiquement utilisé), $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante agissant comme un terme de régularisation anisotrope sur le champs de tenseur. $\alpha \in \mathbb{R}$ est un coefficient de régularité pré-défini par l'utilisateur et $\|\nabla \mathbf{T}\| = (\sum_{i,j} \|\nabla T_{i,j}\|^2)^{\frac{1}{2}}$ représente la norme matricielle classique. Notons que si $\psi(s) = s^2$ et $\alpha = 0$, nous minimisons le critère classique des moindres carrés (3), mais avec une solution garantie positive puisque notre minimisation est effectuée dans l'espace contraint $P(3)$ des tenseurs positifs. Dans la continuité de nos précédents travaux sur les flots matriciels contraints [8, 25], nous proposons donc la descente de gradient suivante (EDP) qui minimise (4) dans $P(3)$:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{(t=0)} = \mathbf{Id} & (\text{Matrices identité } 3 \times 3) \\ \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} = (\mathbf{G} + \mathbf{G}^T)\mathbf{T}^2 + \mathbf{T}^2(\mathbf{G} + \mathbf{G}^T) \end{cases} \quad (5)$$

où \mathbf{G} est la vitesse matricielle non contrainte définie par : $G_{i,j} = \sum_{k=1}^n \psi'(|v_k|)\text{sign}(v_k)(g_k g_k^T)_{i,j} + \alpha \text{div} \left(\frac{\phi'(\|\nabla \mathbf{T}\|)}{\|\nabla \mathbf{T}\|} \nabla T_{i,j} \right)$, avec $v_k = \ln \left(\frac{S_0}{S_k} \right) - g_k^T \mathbf{T} g_k$.

L' éq.(5) assure la positivité des tenseurs \mathbf{T} pour chaque itération du processus de minimisation du critère. De plus, le terme de la fonctionnelle pondéré par α introduit une régularité spatiale pour l'estimation du champ de tenseurs, tout en préservant d'importantes discontinuités physiologiques, grâce au comportement anisotrope de la ϕ -fonctionnelle de régularisation (comme décrit dans la littérature large sur le lissage anisotrope par EDP [20, 24, 30]).

Concernant l'implémentation de telles équations contraintes, un schéma numérique spécifique basé sur des exponentielles matricielles peut-être utilisé pour l'EDP (5) (voir [8] pour plus de précisions) :

$$\mathbf{T}_{(t+dt)} = \mathbf{A}^T \mathbf{T}_{(t)} \mathbf{A} \text{ with } \mathbf{A} = \exp(\mathbf{T}_{(t)}(\mathbf{G} + \mathbf{G}^T)dt)$$

Le choix de cette fonctionnelle est libre en fonction du type de régularité souhaité. Nous avons choisi pour nos expériences la fonction $\phi(s) = \sqrt{1 + s^2}$ (voir [7]), qui a un comportement de lissage isotrope dans les zones homogènes, et anisotropes sur les discontinuités du champ. Quant au choix de la fonction ψ , il dépend bien sûr du type de bruit présent dans les images. Si l'on considère que ce bruit est gaussien sur les images S_k , ce qui est vrai pour un SNR suffisamment grand comme indiqué dans [3, 21], alors la fonction $\psi(x) = \exp(x)$ est un choix optimal. Un travail récent dans [29] propose également une méthode variationnelle pour estimer les tenseurs, mais sans contrainte de positivité, ce qui peut conduire à des résultats physiquement incohérents.

Notre méthode itérative s'applique sur un champ de tenseurs initialement isotropes qui évoluent dans $P(3)$ et qui se transforment peu à peu jusqu'à ce que leur géométrie soit en adéquation avec la relation de Stejskal-Tanner (1).

Le respect des contraintes de positivité et de régularité a un grand intérêt pour l'estimation d'images IRMd, et conduit à de bien meilleurs résultats qu'avec les méthodes classiques présentées précédemment (illustration sur la Fig.2, avec l'estimation d'un champ de tenseurs synthétique).

3 Régularisation d'images IRMd

Le terme de régularisation dans l' éq.(5) agit comme un simple régulariseur spatial de matrices. Après l'estimation, il est intéressant de régulariser directement les informations spectrales du champ de tenseurs estimé. En effet, ces éléments spectraux sont les informations pertinentes (diffusivité et orientations tensorielles) utilisées pour la tractographie (suivi des fibres), et pour le calcul d'indices physiologiques décrivant les tissus, comme par exemple la diffusivité moyenne $\lambda = \frac{1}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$ où l'Anisotropie Fractionnelle $FA = \left(\frac{3}{2} \frac{(\lambda_1 - \lambda)^2 + (\lambda_2 - \lambda)^2 + (\lambda_3 - \lambda)^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Un processus de régularisation agissant sur ces éléments spectraux avec un contrôle précis est donc intéressant pour récupérer des informations structurelles plus cohérentes sur les tenseurs.

3.1 Revue des méthodes existantes

Le problème de la régularisation/débruitage des images IRMd avec des EDP a été récemment abordé dans la littérature. Les algorithmes proposés peuvent être généralement séparés en deux classes :

- **Les méthodes non-spectrales** sont soit basées sur un lissage anisotrope direct des images IRM brutes S_k [28], soit sur un lissage anisotrope des coefficients des matrices 3×3 décrivant les tenseurs [31], tout en prenant en compte d'éventuels couplage entre ces composants multivalués en compte. Elles sont basées sur les méthodes de régularisation par EDP classiques (par exemple [16, 30]). De telles méthodes doivent cependant être appliquées avec précaution : les diffusivités et les orientations tensorielles sont en effet régularisées en même temps, et les diffusivités sont généralement lissées plus vite que les orientations, ce qui conduit rapidement à un effet de *gonflement des valeurs propres*, comme décrit dans [25]. Un risque de la perte d'information d'orientation est alors possible.

- **Les méthodes spectrales** sont basées sur la régularisation séparée des valeurs propres et vecteurs propres des tenseurs. Le champ de diffusivités $\Omega \rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ peut être par exemple considéré comme une image couleur (3 composantes), et traitée par des EDP classiques de régularisation d'images couleurs, qui préservent implicitement la positivité de ces valeurs (voir par exemple [12, 20, 24, 27, 30], parmi d'autres méthodes).

La régularisation des orientations tensorielles est un problème plus ardu, car il nécessite d'agir sur des vecteurs propres formant une base orthonormée (ou de manière équivalente sur des matrices 3×3 orthogonales). Dans [11, 23, 25], les auteurs ont proposés d'utiliser des EDP agissant soit sur le champ de directions principales \mathbf{u} des

tenseurs (une reconstruction des tenseurs est alors nécessaire), ou directement sur le champ des matrices orthogonales $\mathbf{R} = (\mathbf{u}|\mathbf{v}|\mathbf{w})$ formés par les vecteurs propres des tenseurs. Dans les deux cas, les méthodes souffrent d’une nécessité de *réalignement local des vecteur propres* : Une décomposition spectrale d’un champ de tenseur \mathbf{T} peut en effet donner des champs d’orientation $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ discontinus, même si les tenseurs \mathbf{T} forment un champ parfaitement continu (car si \mathbf{u} est un vecteur propre de \mathbf{T} , alors $-\mathbf{u}$ l’est aussi et la décomposition ne peut assurer une continuité spatiale dans le champ décomposé). Agir directement sur ces champs d’orientations tensoriels nécessite donc un processus de réaligement pour chaque voxel et chaque itération, ce qui est particulièrement coûteux en temps de calcul.

3.2 Une méthode spectrale rapide

En se basant sur nos travaux précédents [8], nous proposons une façon simple d’éviter ce problème de discontinuité des vecteurs propres. Notre approche alternative se base sur le fait que restaurer des orientations tensorielles ne nécessite pas forcément le calcul des vecteurs propres des tenseurs. L’idée repose sur l’utilisation d’un *flot isospectral*, qui régularise le champ de tenseur *tout en préservant les valeurs propres des tenseurs*. Il en résulte donc un lissage des orientations tensorielles uniquement. Comme nous mesurons la variation du champ de tenseurs directement à partir des gradients de ces coefficients matriciels, aucune fausse discontinuité ne peut être détectée. La forme générale d’un flot isospectral est (voir [8, 9, 10]) :

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} = [\mathbf{T}, [\mathbf{T}, -(\mathbf{G} + \mathbf{G}^T)]] \text{ avec } [\mathbf{A}, \mathbf{X}] = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{A} \quad (6)$$

Ici, nous choisissons un terme \mathbf{G} correspondant à une régularisation. Ce choix est libre, par exemple :

$$\mathbf{G} = (G_{i,j}) \text{ avec } G_{i,j} = \text{div} \left(\frac{\phi'(\|\nabla \mathbf{T}\|)}{\|\nabla \mathbf{T}\|} \nabla T_{i,j} \right)$$

où $\phi(s) = \sqrt{1 + s^2}$ est une ϕ -fonctionnelle classique, permettant d’avoir une régularisation avec préservation des discontinuités [7]. D’autres termes de régularisation peuvent être envisagés pour \mathbf{G} , comme par exemple ceux proposés dans [12, 20, 24, 30]. En fait, l’éq.(6) est un formalisme très général pour travailler sur des orientations tensorielles.

Comme pour la méthode d’estimation, un schéma numérique spécifique basé sur des exponentielles matricielles peut être utilisé pour implémenter le flot isospectral (6), évitant le problème classique de la reprojction dans l’espaces de tenseurs possédant des valeurs propres donnés [8] :

$$\mathbf{T}_{(t+dt)} = \mathbf{A}^T \mathbf{T}_{(t)} \mathbf{A} \text{ avec } \mathbf{A} = \exp(-dt[\mathbf{G} + \mathbf{G}^T, \mathbf{T}_{(t)}])$$

L’utilisation de deux processus de régularisation (un pour les diffusivités tensorielles, l’autre pour les orientations)

nous permet d’avoir un contrôle précis de la régularisation des informations structurelles importantes des tenseurs. Cette méthode peut être utilisée avec succès pour améliorer la cohérence des fibres calculées lors de la tractographie, mais aussi pour améliorer la caractérisation des tissus par des indices physiologiques, comme l’anisotropie fractionnelle (Fig.4).

4 Visualisation des fibres

Les images IRMd sont bien adaptées pour étudier les réseaux de fibres dans la matière blanche du cerveau. La nécessité de visualiser de tels ensembles de fibres a récemment soulevé un grand intérêt pour le développement de techniques de visualisation spécifiques (très proches de celles rencontrées pour la visualisation de flots, dans le domaine des physiques appliquées). Ces méthodes classiques de visualisation sont :

- **Les ellipsoïdes** sont des représentation naturelles pour les tenseurs de diffusion. Ils sont bien adaptés pour la visualisation de voxel IRMd indépendants, notamment leurs éléments spectraux. Par contre, ils ne sont pas très pratiques pour la visualisation de champs denses de tenseurs, car en grand nombre la visualisation résultante peut être confuse (Fig.3a (gauche)).

- **Les “streamlines”** sont des représentations paramétriques des fibres. Ils sont construits à partir du champ de tenseur \mathbf{T} en traçant des segments qui suivent les orientations principales \mathbf{u} de chaque tenseur. Bien adaptées pour visualiser les fibres dans des régions de taille moyenne, ils peuvent également être peu pratiques pour la visualisation des fibres sur des domaines plus grands (Fig.3a (droite)).

- **Les “LIC”** (line integral convolution). L’idée proposée dans [5, 15], consiste à intégrer un bruit blanc dans la direction principale des tenseurs, résultant en une représentation *texturée* des fibres. Cette méthode est bien adaptée pour visualiser des réseaux de fibres IRMd dans de larges régions, mais leur obtention précise est difficile et coûteuse en temps de calcul.

Nous proposons ici une méthode alternative aux LIC, basée sur des EDP de régularisation. L’idée est la suivante. Nous calculons d’abord un volume 3D de bruit pur $I_0 : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, tel que :

$$\forall x, y, z \in \tilde{\Omega}, \quad I_0(x, y, z) = \nu$$

où ν est une distribution uniforme entre $[0, 255]$. $\tilde{\Omega}$ désigne une version étirée du domaine initial Ω de l’image IRMd que nous voulons visualiser (en pratique 5 à 6 fois plus grande). Puis, nous appliquons l’EDP suivante à ce volume bruité :

$$\begin{cases} I_{(t=0)} = I_0 \\ \frac{\partial I}{\partial t} = \text{trace}(\mathbf{D}\mathbf{H}) \end{cases} \quad (7)$$

où \mathbf{H} correspond à la Hessienne de I et $\mathbf{D} : \Omega \rightarrow \mathbb{P}(3)$ est un champ de tenseurs calculés comme étant :

$$\forall x, y, z, \quad \mathbf{D} = \mathbf{u}\mathbf{u}^T + g(FA) (\mathbf{Id} - \mathbf{u}\mathbf{u}^T)$$

Ici, \mathbf{u} désigne la direction principale de \mathbf{T} , \mathbf{Id} est la matrice identité et $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est une fonction décroissante. Notre équation de diffusion (7) a la propriété de lisser chaque voxel de l'image I dans la direction principale des tenseurs de diffusion correspondants quand ils sont anisotropes (c-à-d quand $FA(x, y, z) \gg 0$), tout en lissant de manière isotrope quand les tenseurs le sont aussi (c-à-d $FA(x, y, z) \simeq 0$). Cette équation utilisant l'opérateur $trace()$ a en effet une interprétation réelle en terme de lissage local (ce qui la rapproche des méthodes de type LIC [5]), ce qui n'est pas toujours le cas pour les équations de diffusion plus classiques basés sur l'opérateur $div()$ (se référer à [27] pour plus de détails sur la différence entre ces deux approches). Des idées similaires ont été récemment proposées pour la visualisation de flots 2D dans [4, 19]. Pour finir, nous pondérons cette image de fibres obtenue par l'indice d'anisotropie FA des tenseurs, qui permet de mettre en valeur les zones à forte anisotropie où les fibres sont présentes. Notre technique de visualisation est bien adaptée pour créer des représentations texturées multi-échelles de la structure des fibres dans les images IRMd. L'illustration est donnée en Fig.3b,c où la visualisation des réseaux de fibres sur une grande portion de l'image IRMd est plus facile avec notre méthode (à droite) qu'avec une représentation paramétrique plus classique.

5 Applications

Nous illustrons l'application de nos trois algorithmes pour le traitement d'image IRMd, sur des champs de tenseurs synthétiques et réels (de la matière blanche du cerveau). Notre jeu de données consiste en 30 images IRM d'une résolution de $128 \times 128 \times 56$, correspondant à des mesures brutes dans 6 directions de gradient différentes, avec 5 amplitudes de champs croissantes pour chaque direction (données provenant du CEA-SHFJ/Orsay, France).

- **Estimation des tenseurs** (Fig.2) : L'intérêt de notre approche variationnelle est démontrée ici avec des images synthétiques bruitées. A partir d'un champ de tenseurs synthétique (Fig.2b), nous avons généré les mesures brutes IRM correspondantes (30 images), que nous avons bruité avec un bruit gaussien (Fig.2a montre un sous-ensemble de 6 de ses 30 images). Nous illustrons les résultats d'estimations obtenus avec les trois méthodes d'estimation présentés dans ce papier. Il est clair que notre formalisme variationnelle est plus robuste au bruit, grâce au respect d'a priori de positivité et de régularité qui jouent un rôle essentiel dans l'estimation du champ.

- **Régularisation** (Fig.4) : La régularisation des champs de tenseurs de diffusion est illustrée avec un cas synthétique et réel. L'effet de notre flot régularisant isospectral est visible sur la Fig.4a,b,c. Malgré le bruit important qui a été ajouté

sur les orientations tensorielles, aucun phénomène de gonflement des valeurs propres n'apparaît car nous agissons uniquement sur les orientations des tenseurs. D'un autre côté, nous avons la possibilité d'avoir aussi un contrôle précis sur la partie diffusivité des tenseurs (Fig.4d,e), qui permet de calculer par exemple des indices physiologiques plus cohérents comme l'anisotropie fractionnelle FA. Un détail du corps calleux est présenté en Fig.4f,g. Remarque qu'avec le champ régularisé, nous retrouvons effectivement plus d'ensembles de fibres. Cela est dû au fait que les fibres à cet endroit sont connues pour être alignées dans des plans $z = cste$, et que le calcul des fibres se fait dans une portion limitée en Z . La régularisation a permis d'aligner effectivement des tenseurs bruités dans ce plan de référence, qui faisaient diverger auparavant les fibres hors du domaine de calcul.

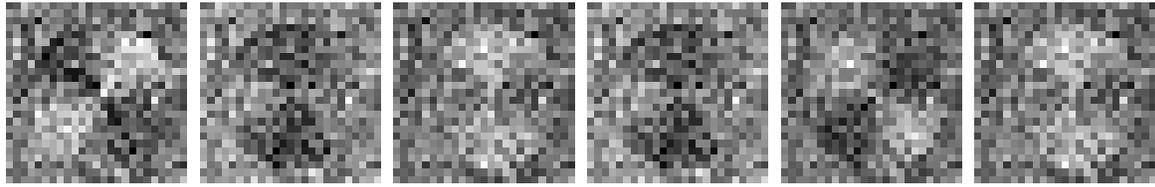
- **Visualisation** (Fig.3) : Ainsi qu'il l'a été expliqué en section 4, notre technique EDP est bien adaptée pour visualiser les réseaux de fibres dans de larges portions d'image IRMd. Les directions des fibres sont clairement visibles dans notre image texturée, alors qu'une représentation paramétrique des fibres pour une région équivalente est plus confuse.

6 Conclusion

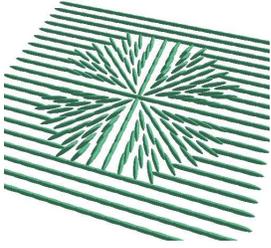
Dans ce papier, nous avons proposé une chaîne de traitement d'images IRMd originale et complète, proposant des alternatives variationnelle aux algorithmes classiques dans ce domaine. Nous avons d'abord étudié la partie importante de l'estimation tensorielle : nous pouvons maintenant assurer la positivité des tenseurs estimés, grâce à un flot variationnel contraint spécifique. Puis, nous avons proposé un algorithme de régularisation simple mais général qui permet de lisser des champs de tenseurs et de récupérer des informations plus cohérentes à la fois sur les orientations des fibres, mais aussi sur leur diffusivité, avec de plus l'utilisation de schémas numériques adaptés qui évitent toute reprojction numérique sur des espaces contraints. Finalement, un schéma EDP a été proposé pour la visualisation de champs denses de fibres à partir d'images IRMd, permettant une visualisation aisée de la structure des réseaux de fibres à différentes échelles.

References

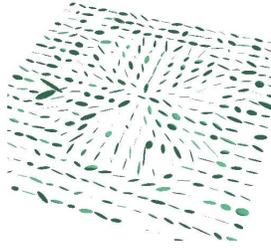
- [1] P.J. Basser, J. Mattiello, and D. LeBihan. Estimation of the effective self-diffusion tensor from the nmr spin echo. *Journal of Magnetic Resonance*, B(103):247–254, 1994.
- [2] P.J. Basser, J. Mattiello, and D. LeBihan. Mr diffusion tensor spectroscopy and imaging. *Biophysica*, (66):259–267, 1994.
- [3] P.J. Basser and S. Pajevic. Statistical artifacts in diffusion tensor MRI caused by background noise. *Magnetic Resonance in Medicine*, 44:41–50, 2000.
- [4] J. Becker, T. Preusser, and M. Rumpf. Pde methods in fbw simulation post processing. *Computing and Visualization in Science*, 3(3):159–167, 2000.



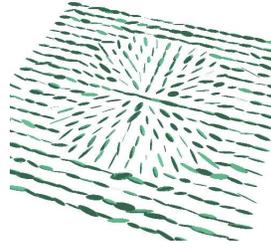
(a) Ensemble partiel d'images brutes bruitées S_k (dans 6 directions différentes de gradient)



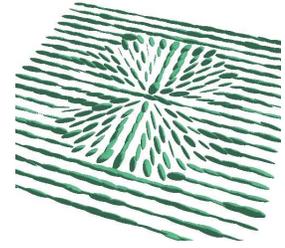
(b) Champ de tenseur de référence correspondant



(c) Estimation directe avec 7 images non-colinéaire [32].

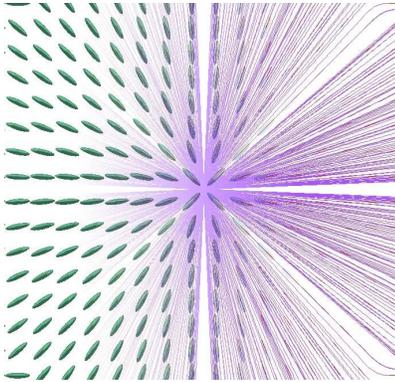


(d) Estimation au moindre carré

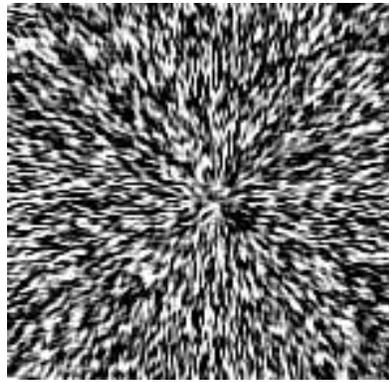


(e) Notre approche variationnelle eq.(5), utilisant des contraintes de positivité et de régularité

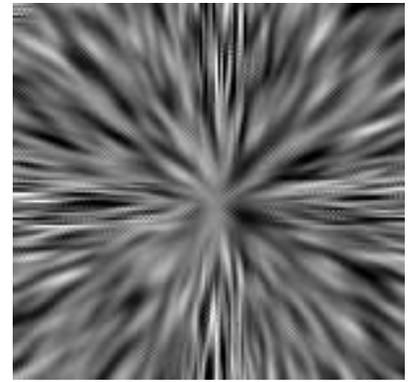
Figure 2: **Estimation d'images IRMs** : Comparaison de notre méthode variationnelle pour l'estimation de tenseurs avec d'autres méthodes, pour une image synthétique de mesures S_k .



(a) Champ de tenseurs visualisé avec des ellipsoïdes (gauche) et des segments pour les fibres (droite)



(b) Visualisation basée sur notre approche EDP (7) (10 iter.)



(c) Visualisation basée sur notre approche EDP (7) (30 iter.)

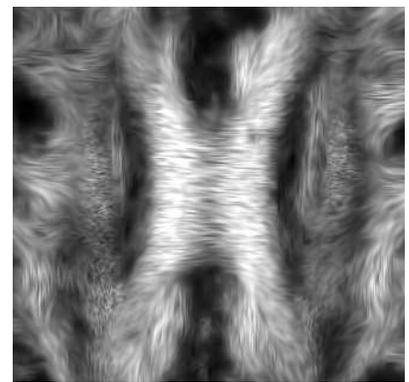
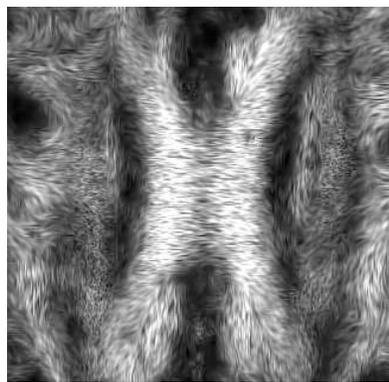
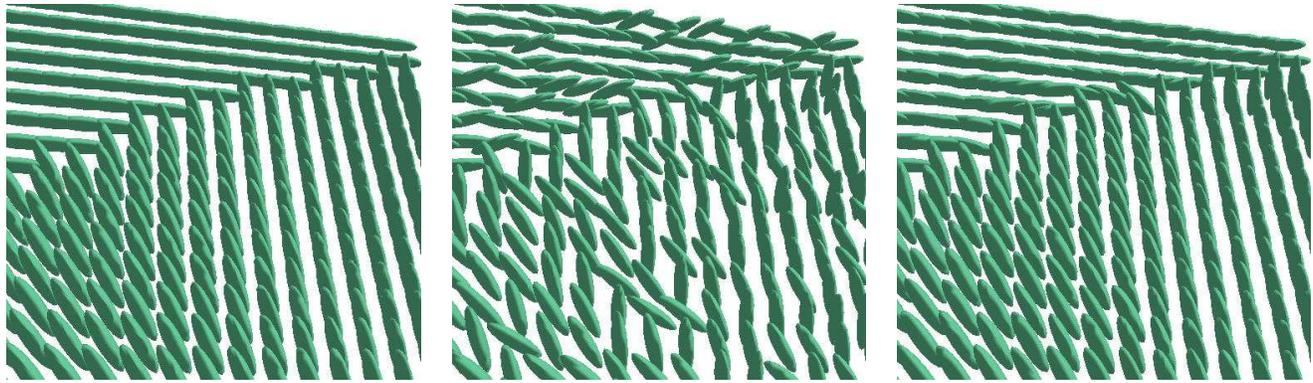


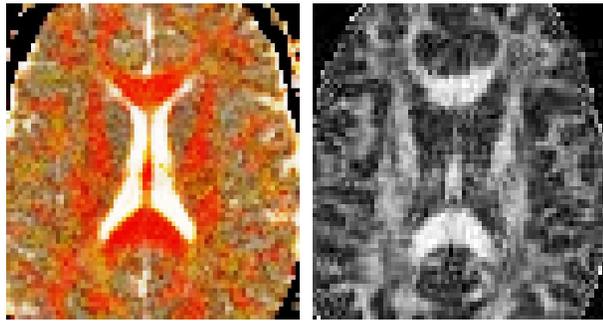
Figure 3: **Visualisation d'images IRMd** : Utilisation d'EDP pour la visualisation de champs de tenseurs synthétiques (haut) et réels (bas). Une partie du corps calleux reliant les deux hémisphères est illustrée en bas.



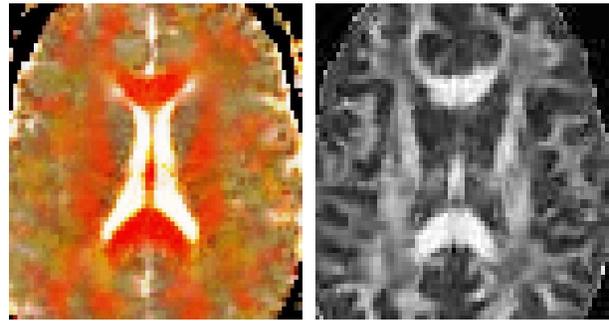
(a) Champ de tenseurs synthétique

(b) Avec du bruit d'orientation

(c) Résultat obtenu avec notre EDP isospectrale (6).



(d) Diffusivités originales de la matière blanche (gauche) et FA correspondant (droite)



(e) Diffusivités régularisées et FA correspondant, utilisant [27].



(f) Partie du corps calleux, avant régularisation tensorielle



(g) Après régularisation tensorielle, en utilisant (6) et [27].

Figure 4: **Régularisation IRMd.** *Haut* : Effet de notre EDP isospectrale sur un champ de tenseurs avec orientations bruitées. *Milieu* : Régularisation des diffusivités tensorielles avec des EDP multivaluées. *Bas* : Régularisation d'une image IRMd (partie du corps calleux), utilisant notre régularisation spectrale.

- [5] B. Cabral. Imaging vector fields using line integral convolution. In *Computer Graphics Proceedings*, pages 263–270, 1993.
- [6] J.S.W. Campbell, K. Siddiqi, B.C. Vemuri, and G.B. Pike. A geometric flow for white matter fiber tract reconstruction. In *IEEE International Symposium on Biomedical Imaging Conference Proceedings*, pages 505–508, July 2002.
- [7] P. Charbonnier, G. Aubert, M. Blanc-Féraud, and M. Barlaud. Two deterministic half-quadratic regularization algorithms for computed imaging. In *Proceedings of the International Conference on Image Processing*, volume II, pages 168–172, 1994.
- [8] C. Chéfd’hotel, D. Tschumperlé, R. Deriche, and O. Faugeras. Regularizing flows for constrained matrix-valued images. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2003.
- [9] M.T. Chu. Constructing symmetric nonnegative matrices with prescribed eigenvalues by differential equations. Technical report, Department of Mathematics, North Carolina State University, August 1990.
- [10] M.T. Chu. A list of matrix flows with applications. Technical report, Department of Mathematics, North Carolina State University, 1990.
- [11] O. Coulon, D.C. Alexander, and S.R. Arridge. A regularization scheme for diffusion tensor magnetic resonance images. In *XVIIth International Conference on Information Processing in Medical Imaging*, 2001.
- [12] R. Kimmel, R. Malladi, and N. Sochen. Images as embedded maps and minimal surfaces: movies, color, texture, and volumetric medical images. *International Journal of Computer Vision*, 39(2):111–129, September 2000.
- [13] D. Le Bihan. Methods and applications of diffusion mri. In I.R. Young, editor, *Magnetic Resonance Imaging and Spectroscopy in Medicine and Biology*. John Wiley and Sons, 2000.
- [14] H. Mamata, Y. Mamata, C.F. Westin, M.E. Shenton, F.A. Jolesz, and S.E. Maier. High-resolution line-scan diffusion-tensor mri of white matter fiber tract anatomy. In *In AJNR Am NeuroRadiology*, volume 23, pages 67–75, 2002.
- [15] T.E. McGraw. Neuronal fiber tracking in dt-mri. Master’s thesis, University of Florida, 2002.
- [16] P. Perona and J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7):629–639, July 1990.
- [17] C. Poupon. *Détection des faisceaux de fibres de la substance blanche pour l’étude de la connectivité anatomique cérébrale*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, December 1999.
- [18] C. Poupon, J.F. Mangin, V. Frouin, J. Regis, F. Poupon, M. Pachot-Clouard, D. Le Bihan, and I. Bloch. Regularization of mr diffusion tensor maps for tracking brain white matter bundles. In W.M. Wells, A. Colchester, and S. Delp, editors, *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention-MICCAI’98*, number 1496 in Lecture Notes in Computer Science, pages 489–498, Cambridge, MA, USA, October 1998. Springer.
- [19] T. Preusser and M. Rumpf. Anisotropic nonlinear diffusion in flow visualization. In *In Proceedings IEEE Visualization ’01*, 2001.
- [20] G. Sapiro. *Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis*. Cambridge University Press, 2001.
- [21] J. Sijbers, A.J. den Dekker, M. Verhoye, A. van der Linden, and D. van Dyck. Adaptive anisotropic noise filtering for magnitude mr data. *Magnetic Resonance Imaging*, 17(10):1533–1539, 1999.
- [22] E.O. Stejskal and J.E. Tanner. Spin diffusion measurements: spin echoes in the presence of a time-dependent field gradient. *Journal of Chemical Physics*, 42:288–292, 1965.
- [23] B. Tang, G. Sapiro, and V. Caselles. Diffusion of general data on non-flat manifolds via harmonic maps theory : The direction diffusion case. *IJCV*, 36(2):149–161, Feb.2000.
- [24] D. Tschumperlé. *PDE’s Based Regularization of Multivalued Images and Applications*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, December 2002.
- [25] D. Tschumperlé and R. Deriche. Diffusion tensor regularization with constraints preservation. In *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Kauai Marriott, Hawaii, December 2001.
- [26] D. Tschumperlé and R. Deriche. Regularization of orthonormal vector sets using coupled PDE’s. In *IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods*, pages 3–10, Vancouver, Canada, July 2001.
- [27] D. Tschumperlé and R. Deriche. Vector-valued image regularization with PDE’s : A common framework for different applications. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition* Madison, Wisconsin, June 2003.
- [28] B. Vemuri, Y. Chen, M. Rao, T. McGraw, T. Mareci, and Z. Wang. Fiber tract mapping from diffusion tensor mri. In *1st IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision (VLSM’01)*, July 2001.
- [29] Z. Wang, B.C. Vemuri, Y. Chen, and T. Mareci. Simultaneous smoothing and estimation of the tensor field from diffusion tensor mri. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition* Madison, Wisconsin, June 2003, pages 461–466.
- [30] J. Weickert. *Anisotropic Diffusion in Image Processing*. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1998.
- [31] J. Weickert and T. Brox. Diffusion and regularization of vector and matrix-valued images. Technical report, Universität des Saarlandes, 2002.
- [32] C.F. Westin and S.E. Maier. A dual tensor basis solution to the stejskal-tanner equations for dt-mri. In *Proceedings of International Society for Magnetic Resonance in Medicine*, 2002.
- [33] C.F. Westin, S.E. Maier, B. Khiddir, P. Everett, F.A. Jolesz, and R. Kikinis. Image processing for diffusion tensor magnetic resonance imaging. In *Second International Conference on medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, volume 1679 of *Lecture Notes in Computer science*, pages 441–452. Springer, September 1999.
- [34] C.F. Westin, S.E. Maier, H. Mamata, A. Nabavi, F.A. Jolesz, and R. Kikinis. Processing and visualization for diffusion tensor mri. In *In proceedings of Medical Image Analysis*, volume 6, pages 93–108, 2002.