

Évaluation de stratégies d'échantillonnages de l'espace Q pour l'imagerie par résonance magnétique de diffusion

Haz-Edine Assemlal David Tschumperlé Luc Brun

GREYC (CNRS UMR 6072), Bd Maréchal Juin, 14050 Caen Cedex, France

{assemlal, dtschump, brun}@greyc.ensicaen.fr

Résumé

Nous abordons la problématique de l'échantillonnage de l'espace de diffusion (espace Q) pour la modalité d'imagerie par résonance magnétique de diffusion (IRMd). Les progrès constants des machines IRMd permettent d'acquérir des images dont la résolution en diffusion est de plus en plus fine, et la stratégie d'échantillonnage joue un rôle croissant dans les performances de reconstruction des profils locaux de diffusion. Nous modélisons différentes répartitions d'échantillons dans un formalisme commun, qui unifie la plupart des propositions existantes de la littérature. Nous évaluons l'influence de différentes stratégies d'échantillonnage de l'espace Q sur une reconstruction du signal effectuée par une série de fonctions de Gauss-Laguerre et d'harmoniques sphériques. A partir d'expérimentations synthétiques, nous proposons un sous-ensemble de répartitions d'échantillonnage qui semblent optimales pour la reconstruction des données IRMd.

Mots Clef

IRM de diffusion, échantillonnage, espace Q , harmoniques sphériques, Gauss-Laguerre.

Abstract

We address the problem of efficient sampling of the diffusion space for the Diffusion Magnetic Resonance Imaging (dMRI) modality. While recent scanner improvements enable the acquisition of more and more detailed images, it is still unclear which q -space sampling strategy gives the best performance. We evaluate several q -space sampling distributions by an approach based on the approximation of the MR signal by a series expansion of Spherical Harmonics and Laguerre-Gaussian functions. With the help of synthetic experiments, we identify a subset of sampling distributions which leads to the best reconstructed data.

Keywords

Diffusion MRI, sampling, q -space, spherical harmonics, Gauss-Laguerre.

1 Introduction

L'Imagerie par Résonance Magnétique (IRM) de diffusion est une modalité d'image relativement récente qui

permet d'observer *in vivo* le flux de diffusion d'eau à l'échelle microscopique dans le cerveau. L'utilisation clinique de l'IRM de diffusion permet de diagnostiquer précocement les problèmes d'accidents vasculaires cérébraux (AVC), plus tôt qu'avec d'autres modalités d'images par IRM [20, 21]. Elle est également utilisée dans le domaine de la recherche sur le cerveau, pour l'étude des faisceaux de fibres nerveuses qui font du cerveau un organe « câblé » [9, 10]. L'acquisition de ces images de diffusion repose sur le principe de résonance magnétique nucléaire combinée avec une séquence d'écho de gradient de diffusion. Traditionnellement, les méthodes de la littérature utilisent la relation de Stejskal et Tanner [25] pour analyser les données dans ce cadre : le profil de diffusion récupéré pour un voxel est supposé varier avec le déplacement local des molécules d'eau en suivant une loi gaussienne. La diffusion mesurée est alors caractérisée classiquement par un coefficient de diffusion *apparent* (ADC) spécifique à la microstructure des tissus biologiques sous-jacents. Néanmoins, il a été montré que ce formalisme, hérité de la caractérisation de la diffusion libre (*i.e.* sans obstacles), ne permet pas l'estimation fine de la microstructure du cerveau, qui possède des arrangements complexes [8, 12, 22]. On lui préfère aujourd'hui le formalisme de propagateur [8, 12, 26], qui permet une caractérisation de la diffusion sans *a priori* sur la structure microscopique du cerveau. Le propagateur P , ou fonction de densité de probabilité (PDF), est relié au profil normalisé E par la transformée de Fourier [8, 12, 26] :

$$P(\mathbf{p}) = \int_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3} E(\mathbf{q}) \exp(-2\pi i \mathbf{q}^T \mathbf{p}) d\mathbf{q}, \quad (1)$$

avec $E(\mathbf{q}) = S(\mathbf{q})/S(0)$ où $S(\mathbf{q})$ correspond au signal de diffusion brut mesuré au vecteur de diffusion \mathbf{q} de l'espace Q ; et \mathbf{p} est le vecteur de distance de déplacement des molécules d'eau. L'imagerie du spectre de diffusion proposé dans [28] est une méthode permettant la mesure d'un tel propagateur de diffusion P . Il se base sur l'échantillonnage du profil de diffusion dans la totalité de l'espace Q (à trois dimensions) et applique la transformée de Fourier de l'Eq.(1) afin d'estimer P . Dans un contexte où l'origine du phénomène de diffusion observé est mal compris, cette méthode est avantageuse car elle permet l'estimation du propagateur de diffusion sans aucun modèle ou *a priori* sur le

profil de diffusion angulaire et/ou radial. Bien que le DSI soit l'une des méthodes les plus prometteuses en théorie, elle n'est pas praticable pour des applications cliniques : le temps d'acquisition nécessaire pour obtenir de la totalité des données de l'espace Q dans une résolution suffisante est très long (plusieurs heures).

Une alternative intéressante à l'échantillonnage complet de l'espace Q a été proposée par Tuch *et al.* [27], en réduisant l'échantillonnage du signal sur une sphère de rayon donné. Cette échantillonnage à haute résolution angulaire HARDI permet de calculer des caractéristiques uniquement angulaires du propagateur de diffusion P , par exemple fonction de densité d'orientation (ODF), isoprobabilité angulaire, *etc.* Ces caractéristiques peuvent notamment servir de base aux algorithmes de trajectographie ayant pour but la reconstruction de faisceaux de fibres de la substance blanche, même en présence de croisements. De nombreuses méthodes HARDI ont déjà été proposées dans la littérature [1, 4, 7, 14, 17, 23, 27]. Ces méthodes utilisent de forts *a priori* sur le profil radial du signal mesuré E : décroissance gaussienne [7, 23], ou en « delta » comme dans [1, 17, 27].

L'échantillonnage parcimonieux [2, 29], parfois dénoté échantillonnage hybride [29] a été la suite logique de ces travaux. Il considère un échantillonnage sur plusieurs sphères dans l'espace Q . Contrairement à l'échantillonnage DSI qui acquiert tout l'espace Q , l'échantillonnage hybride réparti de manière *parcimonieuse* les échantillons. L'avantage de cet échantillonnage est qu'il permet à la fois une analyse angulaire et radiale, ce que ne permettent pas les méthodes basées sur un échantillonnage HARDI, et tout ceci en un temps cliniquement acceptable. Récemment, nous avons proposé dans [6] une méthode générique pour l'estimation du profil de diffusion E sans *a priori* de forme pour un tel échantillonnage qui unifie de nombreuses méthodes de la littérature. Cette approche estime le signal E par le biais d'une base de fonctions de Gauss-Laguerre et d'harmoniques sphériques dans laquelle E est estimé de manière parcimonieuse. Dans la section 2.1, nous rappelons rapidement cette méthode d'estimation. Puis, nous évaluons l'influence de différentes stratégies d'échantillonnages parcimonieux sur cette méthode d'estimation du signal de diffusion E , à partir des données synthétiques dans la section 3. Nous concluons sur les résultats à la section 4.

2 Estimation du profil de diffusion

2.1 Séries de Fourier sphérique

Afin d'être le plus complet possible, nous rappelons dans cette section la méthode générique d'estimation du profil de diffusion publiée dans [6]. L'objectif final étant de calculer le propagateur de diffusion P , une reconstruction correcte du profil de diffusion E est nécessaire. La Fig.1 résume le processus de l'échantillonnage jusqu'à l'estimation du propagateur de diffusion P . Nous considérons une base de fonctions adaptées pour reconstruire le signal de diffusion continu à partir d'un nombre d'échantillons

discrets quelconque. Afin de tirer parti d'une distribution d'échantillonnage (généralement une ou plusieurs sphères dans l'espace Q) nous définissons la base orthonormée suivante, combinant fonctions radiales R_n et angulaires y_l^m exprimées en coordonnées sphériques. Nous modélisons le signal de diffusion E comme une série dans cette base de Fourier sphérique SPF (*Spherical Polar Fourier*) :

$$E(q \cdot \mathbf{u}) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ L \rightarrow \infty}} \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l a_{nlm} R_n(q) y_l^m(\mathbf{u}), \quad (2)$$

avec $\mathbf{q} = q\mathbf{u}$ tel que $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \|\mathbf{u}\| = 1, n \in \mathbb{N}$ étant l'indice radial, et $l \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, -l \leq m \leq l$ les indices angulaires des fonctions de base de la SPF. Les coefficients a_{nlm} pondèrent la série de SPF, composée des harmoniques sphériques réelles (HS) y_l^m et des fonctions de Gauss-Laguerre (GL) R_n .

Les harmoniques sphériques dans le contexte de l'IRM de diffusion présentent de nombreux avantages et sont couramment utilisées en IRMd [1, 4, 14, 17]. Contrairement à d'autres bases de fonctions telles que celles utilisant les fonctions à bases radiales [27], nous permettons ici de représenter le signal de diffusion par un petit nombre de coefficients, sous l'hypothèse que celui-ci soit essentiellement composé de basses ou moyennes fréquences.

Puisque le nombre d'échantillons radiaux est généralement très limité (4 ou 5 au plus), nous souhaitons que le signal radial soit parcimonieux dans R_n , *i.e.* que E soit suffisamment bien caractérisé par un ordre $n \leq N$ faible. Plusieurs études [3, 22] ont rapporté que le profil empirique du signal se comportait comme la composition de plusieurs gaussiennes, dont le nombre est déterminé par la norme maximale du vecteur de diffusion $\|q_{max}\|$. En se basant sur ces observations, elles suggèrent de modéliser la diffusion locale par une fonction bi-gaussienne, correspondante à un mélange de diffusion lente et rapide (diffusion intra et extra cellulaire). Néanmoins, la relation qui lie le modèle bi-gaussien et la diffusion microscopique réelle sous-jacente est encore imprécise [3, 22]. Nous considérons donc une estimation plus générale de la composante radiale du signal de diffusion par l'utilisation d'une base de fonctions de Gauss-Laguerre R_n :

$$R_n(q) = K_n \exp\left(-\frac{q^2}{2\zeta}\right) L_n^{1/2}\left(\frac{q^2}{\zeta}\right), \quad (3)$$

avec la constante $K_n = \sqrt{2n! / (\zeta^{3/2} \Gamma(n + 3/2))}$, le facteur d'échelle ζ et les polynômes de Laguerre généralisés $L_n^{(\alpha)}(x)$. Un troncature radiale à l'ordre $n \leq N$ implique $(N+1)$ coefficients. Un ordre de troncature N faible force l'hypothèse d'une décroissance gaussienne comme pour les méthodes [2, 23], qui provient de la normalisation des polynômes de Laguerre en coordonnées sphériques. Au contraire, un ordre de troncature N élevé relâche cette contrainte et permet une estimation de profil de diffusion potentiellement complexes.

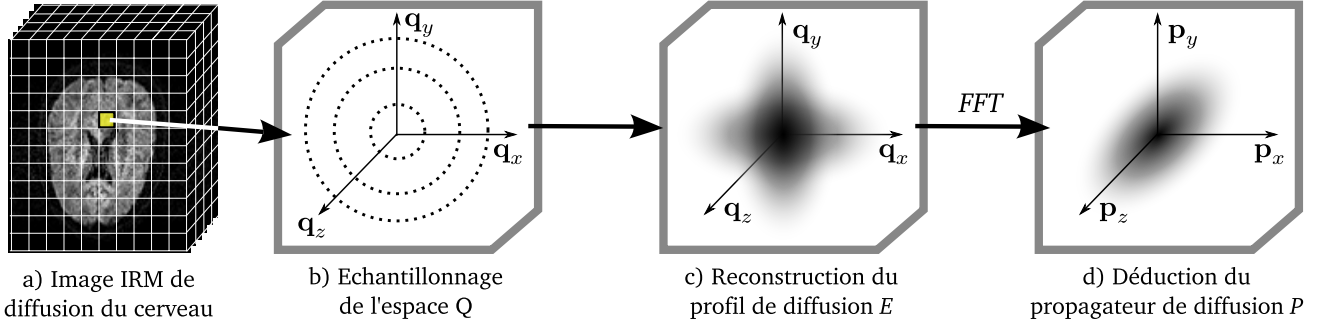


FIGURE 1 – IRM de diffusion : les étapes nécessaires à l'estimation du propagateur de diffusion P . Le choix de l'échantillonnage dans l'espace Q est crucial pour les étapes suivantes. De gauche à droite : (a) L'image IRM de diffusion du cerveau est acquise à trois dimensions ; (b) Contrairement à l'IRM anatomique pour laquelle chaque voxel donne une valeur scalaire, l'IRM de diffusion échantillonne plusieurs valeurs de l'espace Q de diffusion ; (c) A partir de cet ensemble de données réduit, on veut reconstruire le profil de diffusion E dans son intégralité ; (d) Une fois le signal E reconstruit, on peut en déduire le propagateur de diffusion P .

Les ordres de troncatures N et L sont en pratique reliés au nombre d'échantillons des données, et ajustent la balance entre densité des données disponibles et *a priori* sur la forme du signal de diffusion. En pratique, N et L sont choisis tel que le nombre total de coefficients $n_c = (N + 1)(L + 1)(L + 2)/2$ soit approximativement égal au nombre d'échantillons n_q , soit $n_c \leq n_q$. Le choix de favoriser N ou L dépend largement de la distribution des échantillons dans l'espace Q , et donc final de la caractéristique du propagateur P que l'on souhaite observer : L élevé pour des caractéristiques angulaires (image d'anisotropie, ODF, trajectographie, *etc.*), ou N élevé pour des caractéristiques radiales (image de diffusion radiale, probabilité de déplacement nul, *etc.*).

2.2 Calcul des coefficients

Nous proposons d'estimer le signal de diffusion dans la base SPF, pour chaque voxel, par la méthode de minimisation aux moindres carrés régularisés. Pour la suite, nous décrivons l'estimation du signal de diffusion $E(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ pour un voxel \mathbf{x} quelconque du volume de l'image d'IRM de diffusion, $E(\mathbf{q})$ en notation simplifiée. Soit $\{q_i\}_{i \in [1, n_q]}$ la famille d'échantillonnage de l'espace Q . On définit \mathbf{E} comme le vecteur des observations du signal de diffusion pour $\{q_i\}$ tel que $\mathbf{E} = (E[\mathbf{q}_1], \dots, E[\mathbf{q}_{n_s}])^T$ et \mathbf{A} le vecteur des coefficients $\{a_{nlm}\}_{nlm \leq n_c}$ tel que $\mathbf{A} = (a_{000}, \dots, a_{NLL})^T$. La matrice \mathbf{M} de la base des fonctions SPF, de taille $n_q \times n_c$, s'écrit $\mathbf{M} = (R_n(q_j)y_l^m(\mathbf{u}_j))_{nlm \times j \in \mathbb{N}^3 \times \mathbb{N}}$. Dans le cas où $n_q > n_c$, le système d'équation est surdéterminé, le système d'équations linéaire du problème s'écrit sous la forme matricielle $\mathbf{E} = \mathbf{M}\mathbf{A} + \epsilon$ avec ϵ la matrice de variance-covariance d'erreur. On cherche les coefficients \mathbf{A} qui minimisent la norme quadratique de l'erreur $\|\epsilon\| = \|\mathbf{E} - \mathbf{M}\mathbf{A}\|$, et qui se déterminent donc via la pseudo-inverse de \mathbf{M} . En pratique, ce problème est mal posé du fait du faible nombre d'échantillons disponibles, et l'inversion de \mathbf{M} entraîne des problèmes de stabilité numérique de l'inversion de \mathbf{M} . On régularise le problème par

l'injection d'*a priori* sur le signal par les matrices \mathbf{N} et \mathbf{L} :

$$\mathbf{A} = \arg \min_{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_c}} \|\mathbf{E} - \mathbf{M}\mathbf{A}\|^2 + \lambda_n \|\mathbf{N}\|^2 + \lambda_l \|\mathbf{L}\|^2 \quad (4)$$

Les matrices de régularisation \mathbf{N} et \mathbf{L} sont des matrices diagonales tel que $\text{diag}(\mathbf{N}) = n(n + 1)$ et $\text{diag}(\mathbf{L}) = l(l + 1)$. Ces matrices pénalisent les hautes fréquences des parties radiales et angulaires de l'estimation dans la base SPF, sous l'hypothèse qu'elles capturent le bruit. Les termes λ_n et λ_l permettent de pondérer cet *a priori*. De manière similaire à [14], la régularisation dans les domaines des harmoniques sphériques est équivalente à l'application d'un filtre de lissage dans l'espace Q [16]. Nous considérons un terme de régularisation supplémentaire qui permet de favoriser une décroissance mono-gaussienne, en accord avec les résultats empiriques. La solution de l'Eq.(4) est alors donnée par la pseudo-inverse de Moore-Penrose régularisée :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{M}^T \mathbf{M} + \lambda_l \mathbf{L}^T \mathbf{L} + \lambda_n \mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{E} \quad (5)$$

Le facteur d'échelle ζ dans la fonction R_n de la base SPF joue un rôle important dans la convergence entre l'estimation et les données réelles. On peut remarquer que le premier terme de la série des fonctions de Gauss-Laguerre R_0 est une gaussienne, à un coefficient multiplicateur près. Or, le signal de diffusion s'écrit $E(q) = \exp(-4\pi q^2 \tau D)$ dans le formalisme de Stejskal-Tanner [25], avec D le coefficient de diffusion apparent (ADC). Par identification entre les termes exponentielles, on obtient la formule du facteur d'échelle $\zeta = (8\pi \tau D)^{-1}$. L'estimation de ζ par cette méthode permet donc de capturer une décroissance mono-gaussienne du signal dès le premier terme $n = 0$, les termes n suivants servant à l'estimation d'une éventuelle queue oscillante. L'avantage de cette méthode est que le calcul du facteur d'échelle ζ prend en compte tous les échantillons disponibles du signal de diffusion, contrairement à la méthode précédente.

3 Comparaison des échantillonnages de l'espace Q

Le nombre d'échantillons du signal E est fortement limité par le temps d'acquisition, pendant lequel le patient doit rester immobile. La distribution des échantillons est donc cruciale et doit être choisie avec précaution. Considérant un nombre donné d'échantillons, quelle est la meilleure répartition de ces échantillons dans l'espace Q? Quel ordre de troncature radiale N doit on choisir pour estimer les données à décroissance gaussienne et bi-gaussienne? C'est à ces questions reliées au protocole d'échantillonnage que nous essayons de répondre ici.

3.1 Échantillonnage de l'espace Q

Modélisation. Soit $n_q \in \mathbb{N}$ le nombre total d'échantillons de l'espace Q et $n_b \in \mathbb{N}$ le nombre de sphères d'échantillonnage. On désigne par q_{\min} et q_{\max} les vecteurs de diffusion minimal et maximal de l'échantillonnage en question.

Nous définissons le rayon de la i^e sphère avec $i \in [1, n_b]$ par la fonction q_β , dont le paramètre β permet de faire varier la position des sphères dans l'intervalle $[q_{\min}, q_{\max}]$:

$$q_i(\beta) = \left(\frac{i-1}{n_b-1} \right)^\beta (q_{\max} - q_{\min}) + q_{\min} \quad (6)$$

et $q_1(\beta) = 0$. Dans cette étude pour des raisons de simplicité, nous supposons que les sphères sont uniformément réparties dans l'espace Q ($\beta = 1$), dans l'intervalle $[q_{\min}, q_{\max}] = [1, 30] \text{ mm}^{-1}$.

Nous définissons le nombre d'échantillons pour la x^e sphère telle que $x \in [1, n_b]$ par la fonction f_x , dont le paramètre de dispersion η permet de faire varier le nombre d'échantillons suivant le rayon q_x de la sphère en question:

$$f_x(\eta) = \left(\frac{q_x(\beta)}{\sum_{i=1}^{n_b} q_i(\beta)} \right)^\eta n_q, \quad (7)$$

Plus la dispersion η est grande, plus les échantillons sont répartis sur les sphères extérieures de l'espace Q, au détriment des sphères intérieures.

Plusieurs méthodes de calculs par minimisation d'énergie électrostatique ont été proposées dans la littérature pour obtenir des sphères uniformément échantillonnées [11, 13, 15, 18]. Nous faisons subir aux sphères qui possèdent peu d'échantillons une rotation aléatoire afin de ne pas biaiser l'estimation du signal E dans une direction arbitraire ($f_x(\eta) \leq 6$ dans nos expériences). Nous ne considérons pas d'*a priori* sur les directions privilégiées des microstructures mesurées (structures orientées suivant un certain angle connu par avance, par exemple).

La Tab.1 donne l'allure des échantillonnages de l'espace Q générés en 3D par les Eq.(7) et (6), dont les coupes centrales sont projetés sur un plan 2D pour illustration.

Relation avec les échantillonnages existants. L'échantillonnage donné par le paramétrage $f(\eta = 0)$ correspond à

un nombre constant d'échantillons par sphère, comme décrit par [5, 19, 24]. L'échantillonnage donné par le paramétrage $f(\eta = 2)$ correspond à une répartition uniforme des échantillons dans l'espace Q comme décrit par [2, 29]. La section qui suit va nous permettre d'évaluer la meilleure répartition des échantillons dans l'espace Q, à savoir les paramètres de dispersion η et le nombre de sphère n_b .

3.2 Données de diffusion

Synthèse des données. Pour les expériences suivantes, nous synthétisons le signal de diffusion E par un mélange multi-tensoriel:

$$E(q \cdot \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{N_f} f_i \exp(-4\pi^2 \tau (q - m_i)^2 \mathbf{u}^T \mathbf{D}_i \mathbf{u}) \quad (8)$$

avec $\tau = 10^{-2} \text{ s}$ le temps de diffusion, f_i la pondération de la i^e gaussienne, telle que $\sum_{i=1}^{N_f} f_i = 1$. La présence de la moyenne m_i de la i^e gaussienne permet de simuler une décroissance radiale multi-gaussienne à moyenne non nulle.

Détermination de l'ordre de troncature radiale N . Nous souhaitons déterminer en pratique quel ordre de troncature radial N est suffisant pour l'estimation du signal de diffusion. La Fig.2 illustre une simulation des différents profils du signal de diffusion *a priori* les plus communément rencontrées dans la matière blanche du cerveau:

- (a) diffusion isotrope Fig.2a avec $\{N_f = 1, m_1 = 0, f_1 = 1, \text{diag}(D_1) = 1/25(0.2, 0.2, 0.2)^T \text{ mm}^2 \text{ s}^{-1}\}$;
- (b) un faisceau de fibres à une direction Fig.2b avec $\{N_f = 1, m_1 = 0, f_1 = 1, \text{diag}(D_1) = 1/25(1.5, 0.2, 0.2)^T \text{ mm}^2 \text{ s}^{-1}\}$;
- (c) deux faisceaux de fibres se croisant (*crossing fibers*) Fig.2c avec $\{N_f = 2, m_1 = m_2 = 0, f_1 = 0.5, \text{diag}(D_1) = 1/25(1.5, 0.2, 0.2)^T \text{ mm}^2 \text{ s}^{-1}, \text{diag}(D_2) = 1/25(0.2, 1.5, 0.2)^T \text{ mm}^2 \text{ s}^{-1}\}$;
- (d) une diffusion rapide et une diffusion lente Fig.2d, pour le cas isotrope avec $\{N_f = 2, m_1 = 0, f_1 = 0.7, \text{diag}(D_1) = 1/20(0.2, 0.2, 0.2)^T \text{ mm}^2 \text{ s}^{-1}, m_2 = 15, \text{diag}(D_2) = 1/20(0.2, 0.2, 0.2)^T \text{ mm}^2 \text{ s}^{-1}\}$.

Dans la Fig.3, nous déterminons quelle ordre de troncature radiale N est suffisant pour l'estimation précise des signaux de diffusion présentés à la Fig.2. L'erreur normalisée \mathcal{E} du spectre d'énergie entre le signal original et les données reconstruites est exprimée par:

$$\mathcal{E} = \frac{\sum_{i=1}^{n_q} E[\mathbf{q}_i]^2 - \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l a_{nlm}^2}{\sum_{i=1}^{n_q} E[\mathbf{q}_i]^2} \quad (9)$$

Conditionnement. Le conditionnement C est un indice intéressant pour quantifier l'influence de la stratégie d'échantillonnage sur la stabilité numérique de la reconstruction, *indépendamment des données*. Cet indice mesure le conditionnement de la matrice régularisée \mathbf{M}_{reg} de l'Eq.(5) telle que:

$$C = \|\mathbf{M}_{reg}\|_\infty \|\mathbf{M}_{reg}^{-1}\|_\infty \quad (10)$$

	$\eta = -2$	$\eta = -1$	$\eta = 0$	$\eta = 1$	$\eta = 2$	$\eta = 3$
$n_b = 2$						
$n_b = 5$						
$n_b = 8$						
$n_b = 10$						

TABLE 1 – Vue d’ensemble des différentes stratégies possibles pour l’échantillonnage de l’espace Q en fonction du nombre de sphère n_b et du paramètre η donné par l’Eq.(7). Le nombre d’échantillons total est fixe $n_q = 3000$. Le rayon des sphères est distribué uniformément dans l’intervalle $[q_{\min}, q_{\max}]$ ($\beta = 1$).

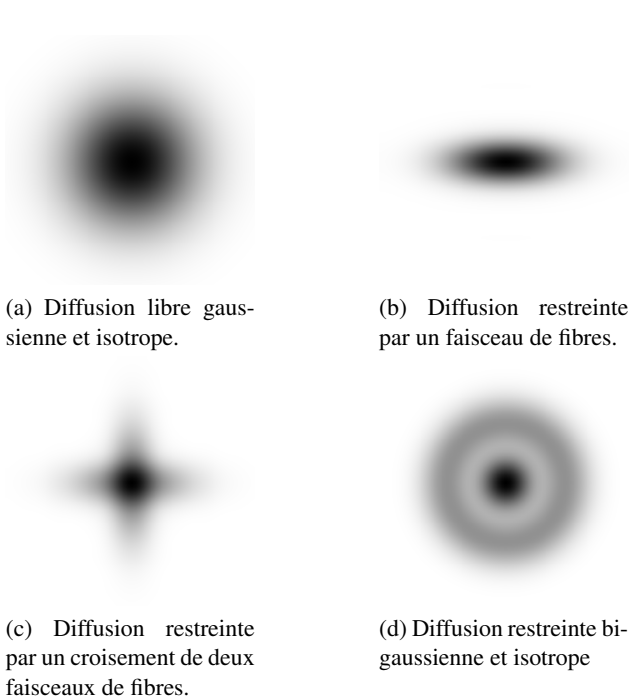


FIGURE 2 – Quelques profils typique du signal de diffusion locale fréquemment rencontrés dans la substance blanche du cerveau humain. Les données sont représentées en tant que coupe 2D centrale de l’image volumique $64 \times 64 \times 64$, dont le centre $\mathbf{q} = 0$ de l’espace Q est le centre de l’image.

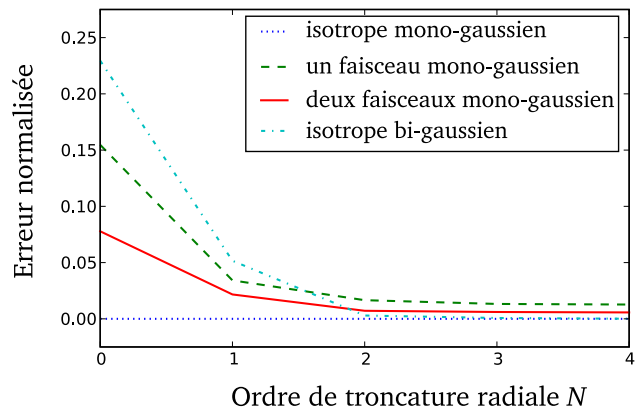


FIGURE 3 – Influence de l’ordre de troncature radiale N sur l’erreur normalisée du spectre d’énergie entre les données originales et la reconstruction dans notre base. Le nombre d’échantillons est $n_q = 64^3$, et la troncature angulaire est $L = 4$.

Nous effectuons une comparaison des différentes stratégies d’échantillonnage à la Fig.4, générées par les Eq.(7,6). Ce graphique illustre l’évolution de la reconstruction de E en fonction du nombre de sphères n_b et du paramètre η . Autrement dit, chaque pixel des images de la Fig.4 représente un type d’échantillonnage, modélisé par le nombre de sphères n_b et le paramètre η . La luminosité du pixel donne les performances de cet échantillonnage, mesuré par le conditionnement C : plus C est faible, meilleure est la stabilité numérique de la reconstruction. En conséquence, plus le

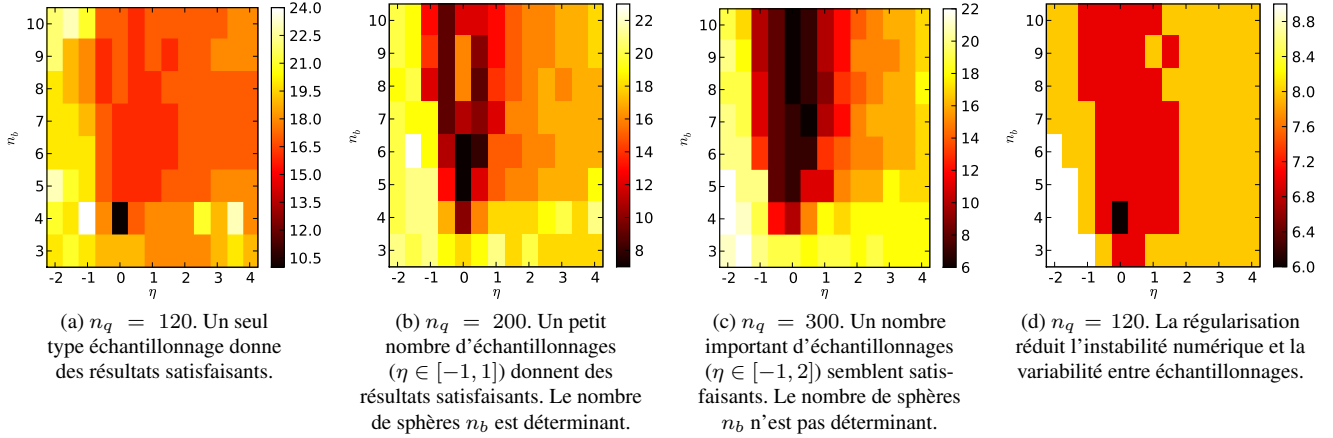


FIGURE 4 – Chaque pixel correspond à un type d'échantillonnage paramétré par les Eq.(7,6). La luminosité du correspond au conditionnement C : plus le pixel est sombre, meilleur est l'échantillonnage. Les graphiques présentent l'évolution du conditionnement C avec la distribution d'échantillonnage paramétrée par η et le nombre de sphère n_b . Plus la valeur de C est basse, plus la reconstruction est stable. Le symbole n_q dénote le nombre total d'échantillons. Les ordres de troncatures angulaires et radiales sont $L = 4$ et $N = 3$, en conséquence, le nombre de sphère minimum est $n_b \geq 3$. (a), (b), (c) Pas de régularisation : $\lambda_n = \lambda_l = 0$. (d) Régularisation radiale et angulaire pondérées par : $\lambda_n = 10^{-4}$, $\lambda_l = 10^{-6}$. Les données simulent un croisement de faisceaux de fibres nerveuses Fig.2c.

pixel est sombre, meilleur est l'échantillonnage. Seul les résultats sur les données en profil de croisement de fibres nerveuses (c.f. Fig.2d) sont données car nous n'avons pas observé de différences significatives avec les autres configurations de la Fig.2. Une analyse plus poussée de deux échantillonnages spécifiques ($\eta = \{0, 2\}$) est illustrée à la Fig.5.

La Fig.6 illustre les mêmes expériences que la Fig.4 pour des résultats qualitatifs de bonnes et mauvaises reconstructions du signal de diffusion E .

4 Résultats et Discussion

Les résultats de la Fig.3 suggèrent qu'un ordre de troncature radiale raisonnable dépend du profil des données à estimer. Néanmoins, dans toutes nos simulation de données de la Fig.2, la convergence vers les données originale est réalisée pour $N = 3$. Concernant le paramètre η , les résultats de la Fig.4 indiquent que les meilleures stratégies d'échantillonnage de l'espace Q sont données pour une valeur de $\eta \in [-1, 2]$. Cette conclusion est accentuée pour un nombre total d'échantillons décroissant comme le montre la Fig.4(a-c). Ces résultats sont en accord avec les autres propositions de la littérature [2, 5, 19, 29].

En concordance avec les résultats de la Fig.4, nous avons comparé plus profondément deux stratégies du paramètre η à la Fig.5 : « répartition constante » des échantillons sur la sphère constante ($\eta = 0$) et « répartition uniforme » des échantillons dans l'espace Q en considérant les coordonnées sphériques ($\eta = 2$). Dans ce graphique, $n_q = 300$, $n_b \in [1, 10]$ et l'ordre de troncature angulaire est $L = 4$. La Fig.5a montre l'évolution du nombre de condition C en fonction du nombre de sphère d'échantillonnage n_b et de l'ordre de troncature radiale N . Comme attendu, la valeur de C est élevée pour $N > n_b$ et donne des résultats très

instables. Pour $N \leq n_b$, le nombre de condition décroît faiblement avec des valeurs croissantes de N et est quasi indépendant des valeurs de n_b . Les résultats de l'échantillonnage à répartition constante ($\eta = 0$) ont une évolution plus monotone de C que pour la répartition uniforme ($\eta = 2$).

Les Fig.5b et (c) donne l'évolution du PSNR pour la reconstruction d'un signal composé de mixture gaussienne. Bien que les maxima du PSNR pour les deux répartitions d'échantillonnage soient très similaires (≈ 40 dB, c.f. Fig.4), il est clair que l'échantillonnage $\eta = 0$ est plus robuste aux mauvaises valeurs de N et n_b . En outre, la robustesse de la reconstruction aux mauvaises valeurs du facteur d'échelle ζ peut se lire le long des lignes de la Fig.5b. En effet, la fonction R_0 de la base a une décroissance gaussienne qui devrait entièrement caractérisé un signal gaussien isotrope, à condition que la valeur de ζ estimée soit correcte (c.f. Fig.3). Dans la Fig.5b, nous avons volontairement donné une valeur erronée de ζ cinq fois supérieure à la variance du signal. Le signal E est reconstruit pour $N \geq 3$ en accord avec les résultats de convergence expérimental donné par la Fig.3. Une fois de plus, les résultats de la Fig.5b montre que le protocole d'échantillonnage $\eta = 0$ est plus robuste au mauvaises valeurs de ζ . Comme attendu, les résultats sur données bruitées de la Fig.5d ont un PSNR en moyenne en dessous des résultats sur données non bruitées de la Fig.5d. Il est intéressant de noter que les meilleurs résultats sur données bruitées ont été obtenus pour des ordres de troncature radiale N moins élevé que sur données non bruitées. Ceci s'explique par le fait qu'une reconstruction du signal avec une valeur de N élevée peut capturer significativement plus de bruit que pour une faible valeur de N .

Les résultats des expériences précédentes suggèrent que la

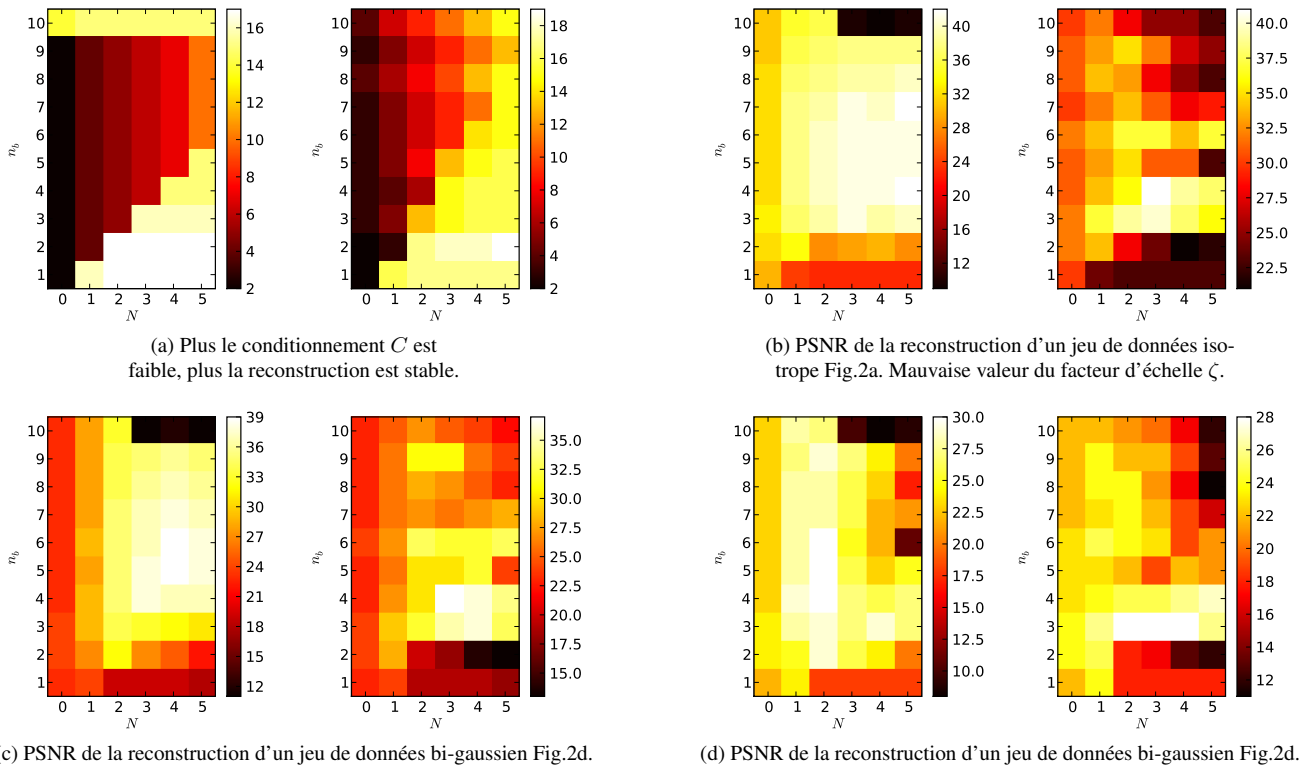


FIGURE 5 – Comparaison de l'échantillonnage à répartition uniforme ($\eta = 0$, à gauche) et constante ($\eta = 2$, à droite), en fonction de l'ordre de troncature radiale N de la base SPF et du nombre de sphère n_b de l'espace Q . (b) Signal E isotrope (*c.f.* Fig.2a) avec un facteur d'échelle ζ cinq fois supérieur à la variance de E . (d) Du bruit de Rice est ajouté aux données, tel que le PSNR=18.9 dB.

stratégie d'échantillonnage par *répartition constante* ($\eta = 0$) donne de meilleures performances que l'échantillonnage uniforme ($\eta = 2$). Les meilleurs reconstructions quantitatives sont obtenues pour l'ordre de troncature radiale $N \approx 3$ et un nombre de sphère $n_b \approx 4$. Cela confirme qu'un bon échantillonnage des basses fréquences de l'espace Q permet une meilleure reconstruction du signal au sens de l'erreur quadratique. Cela s'explique par la répartition de l'énergie du signal de diffusion E majoritairement pour des valeurs de q faibles, d'après l'*a priori gaussien* du signal. Il est intéressant de noter que Jones *et al.* dans [18] ont obtenu des résultats contradictoires aux nôtres. En effet, pour le cas restreint de la méthode DTI avec deux sphères d'échantillonnages, les auteurs ont observé de meilleurs résultats avec plus d'échantillons sur les sphères extérieures ($\eta > 0$). Ces résultats contradictoires s'expliquent notamment par l'*a priori gaussien* de la méthode DTI qui contraint fortement le modèle et compense le faible rapport signal sur bruit du signal de diffusion pour des valeurs de q élevées (*i.e.* $E(\mathbf{q})$ proche de zéro). L'utilisation d'un modèle moins contraint, comme c'est le cas de notre base SPF pour des ordres de troncatures radiale N et angulaire L suffisamment élevés, permet d'approximer le signal de diffusion avec plus de précision que le DTI ce qui le rend également plus sensible au bruit. Nous avons proposé une estimation du signal dans la base SPF robuste

au bruit de Rice de l'IRM de diffusion dans [6].

5 Conclusion

Dans ce papier, nous avons étudié l'influence de l'échantillonnage pour l'IRM de diffusion. A notre connaissance, ce travail est l'un des premier sur ce sujet sensible de l'échantillonnage de l'IRMd. Nous avons évalué l'influence de ces stratégies sur la qualité de reconstruction du signal dans la base de fonctions d'harmoniques sphériques et de Gauss-Laguerre. Les résultats indiquent qu'il est préférable de favoriser un échantillonnage de l'espace Q pour de faibles gradients de diffusion. Nous avons identifié un sous ensemble de distribution d'échantillonnages qui donnent les meilleurs performances, en adéquation avec des contraintes de temps pour une application clinique. Il nous semble particulièrement intéressant de valider ces résultats formulés sur la base de données synthétiques, dans le cadre de données réelles issues de l'acquisition d'IRM de diffusion du cerveau humain.

Références

- [1] A. Anderson. Measurement of fiber orientation distributions using high angular resolution diffusion imaging. *Magn. Res. in Med.*, 54(5), 2005.

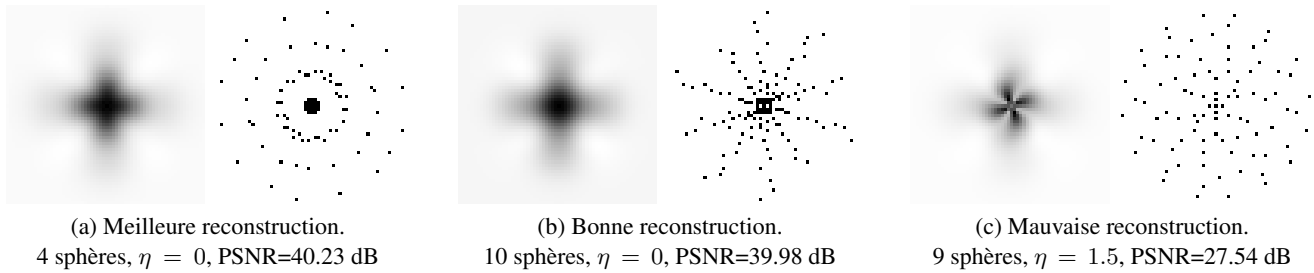


FIGURE 6 – Exemples de quelques distributions d'échantillonnages et de leur reconstructions respectives.

- [2] Y. Assaf and P. J. Basser. Composite hindered and restricted model of diffusion (charmed) mr imaging of the human brain. *NeuroImage*, 27 :48–58, 2005.
- [3] Y. Assaf and Y. Cohen. In vivo and in vitro bi-exponential diffusion of n-acetyl aspartate (naa) in rat brain : a potential structural probe ? *NMR Biomed*, 11, 1998.
- [4] H. Assemlal, D. Tschumperlé, and L. Brun. Fiber tracking on hardi data using robust odf fields. pages 133–136. ICIP, 2007.
- [5] H. Assemlal, D. Tschumperlé, and L. Brun. Efficient computation of pdf-based characteristics from diffusion mr signal. MICCAI, 2008.
- [6] H. Assemlal, D. Tschumperlé, and L. Brun. Efficient and robust computation of pdf features from diffusion mr signal. *Med. Image Anal.*, 13(5) :715 – 729, 2009.
- [7] P. J. Basser, J. Mattiello, and D. LeBihan. Estimation of the effective self-diffusion tensor from the nmr spin echo. *J. Magn. Res.*, 103 :247–254, 1994.
- [8] P. Callaghan. *Principles of Nuclear Magnetic Resonance Microscopy*. Oxford University Press, USA, 1991.
- [9] C. Chefd'hotel, D. Tschumperlé, R. Deriche, and O. Faugeras. Regularizing flows for constrained matrix-valued images. *J. Math. Imaging Vis.*, 20(1-2) :147–162, 2004.
- [10] T. Conturo, N. Lori, T. Cull, et al. Tracking neuronal fiber pathways in the living human brain. volume 96, pages 10422–10427. National Acad Sciences, 1999.
- [11] P. Cook, M. Symms, P. Boulby, and D. Alexander. Optimal acquisition orders of diffusion-weighted MRI measurements. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 25(5) :1051–8, 2007.
- [12] D. Cory and A. Garroway. Measurement of translational displacement probabilities by nmr : an indicator of compartmentation. *Magn. Res. in Med.*, 14(3) :435–444, 1990.
- [13] R. Deriche, J. Calder, and M. Descoteaux. Optimal real-time q-ball imaging using regularized kalman filtering with incremental orientation sets. *Med. Image Anal.*, 13(4) :564 – 579, 2009.
- [14] M. Descoteaux, E. Angelino, S. Fitzgibbons, and R. Deriche. Regularized, fast and robust analytical q-ball imaging. *Magn. Res. in Med.*, 58 :497–510, 2007.
- [15] J. Dubois, C. Poupon, F. Lethimonnier, and D. Le Bihan. Optimized diffusion gradient orientation schemes for corrupted clinical DTI data sets. *Magma*, 19(3) :134, 2006.
- [16] D. Healy, H. Hendriks, and P. Kim. Spherical deconvolution. *J. Multivariate Anal.*, 67(1) :1–22, 1998.
- [17] C. Hess, P. Mukherjee, E. Han, D. Xu, and D. Vigneron. Q-ball reconstruction of multimodal fiber orientations using the spherical harmonic basis. *Magn. Res. in Med.*, 56(1) :104–117, 2006.
- [18] D. Jones, M. Horsfield, and A. Simmons. Optimal strategies for measuring diffusion in anisotropic systems by magnetic resonance imaging. *Magn. Res. in Med.*, 42(3) :515–525, 1999.
- [19] M. Khachatryan, J. Wisco, and D. Tuch. Boosting the sampling efficiency of q-ball imaging using multiple wavevector fusion. *Magn. Res. in Med.*, 57 :289–296, 2007.
- [20] D. LeBihan, E. Breton, D. Lallemand, P. Grenier, E. Cabanis, and M. Laval-Jeantet. Mr imaging of intravoxel incoherent motions : Application to diffusion and perfusion in neurologic disorders. *Radiology*, pages 401–407, 1986.
- [21] M. Moseley, Y. Cohen, J. Mintorovitch, L. Chileuitt, H. Shimizu, J. Kucharczyk, M. Wendland, and P. Weinstein. Early detection of regional cerebral ischemia in cats : comparison of diffusion and t 2-weighted mri and spectroscopy. *Magn. Res. in Med.*, 14(2) :330–346, 1990.
- [22] T. Niendorf, R. Dijkhuizen, N. D.G., C. M. van Lookeren, and K. Nicolay. Biexponential diffusion attenuation in various states of brain tissue : implications for diffusion-weighted imaging. *Magn. Res. in Med.*, 36 :847–857, 1996.
- [23] E. Özarslan, T. M. Sherperd, B. C. Vemuri, S. J. Blackband, and T. H. Mareci. Resolution of complex tissue microarchitecture using the diffusion orientation transform (dot). *NeuroImage*, 31 :1086–1103, 2006.
- [24] V. Pickalov and P. J. Basser. 3d tomographic reconstruction of the average propagator from mri data. ISBI, 2006.
- [25] E. Stejskal and J. Tanner. Spin diffusion measurements : spin echoes in the presence of a time-dependent field gradient. *J. Chem. Phys.*, 42 :288–292, 1965.
- [26] E. O. Stejskal. Use of spin echoes in a pulsed magnetic-field gradient to study anisotropic, restricted diffusion and flow. *J. Chem. Phys.*, 43(10) :3597–3603, 1965.
- [27] D. Tuch. Q-ball imaging. *Magn. Res. in Med.*, 52 :1358–1372, 2004.
- [28] V. Wedeen, T. Reese, D. Tuch, M. Weigl, J.-G. Dou, R. Weiskoff, and D. Chesler. Mapping fiber orientation spectra in cerebral white matter with fourier transform diffusion mri. page 82. ISMRM, 2000.
- [29] Y.-C. Wu and A. L. Alexander. Hybrid diffusion imaging. *NeuroImage*, 36, 2007.