Régularisation d'Images Multivaluées par EDP : Un Formalisme Commun pour Différentes Applications

David Tschumperlé[1] et Rachid Deriche[2]

[1] INRIA Sophia-Antipolis,
Laboratoire Odyssée,
BP 93, 2004 Route des Lucioles, 06902 Sophia-Antipolis, France.
Tél : int+ 33 4 92 38 79 21, Fax : int+ 33 4 92 38 78 45
`David.Tschumperle@sophia.inria.fr`

[2] INRIA Sophia-Antipolis,
Laboratoire Odyssée,
BP 93, 2004 Route des Lucioles, 06902 Sophia-Antipolis, France.
Tél : int+ 33 4 92 38 78 30, Fax : int+ 33 4 92 38 78 45
`Rachid.Deriche@sophia.inria.fr`

Résumé Nous étudions la régularisation d'images multivaluées par des méthodes variationnelles et EDP. A partir de l'étude de l'existant, nous proposons un formalisme unificateur basé sur une interprétation très locale des processus de régularisation. Les équation générales obtenues sont alors spécialisées en une nouvelle EDP de lissage qui respecte mieux la géométrie locale des images vectorielles. Un schéma numérique spécifique est proposé et validé pour des problèmes classiques de traitement d'images : restauration, Inpainting, interpolation et visualisation de flots.

Mots clés : EDP de régularisation, Diffusion anisotrope, Images multivaluées.

1 Introduction et Motivation

Les EDP de régularisation anisotrope ont toujours soulevées un grand intérêt dans le domaine du traitement d'images. La possibilité de lisser une image tout en préservant ses discontinuitées fortes (contours et coins), a ouvert de nouvelles voies pour traiter des problèmes récurrents dans ce domaine. Pour cette raison, de nombreux algorithmes de régularisation ont été présentés dans la littérature, particulièrement pour le cas des *images scalaires* $2D$ ([1,17,18,28] parmi d'autres). L'extension de ces algorithmes aux images *multivaluées* $\mathbf{I} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ a été récemment traitée, conduisant à des EDP de diffusion plus élaborées : un *terme de couplage entre les composantes vectorielles* apparait dans les équations, par la considération d'une *géométrie multivaluée locale*, donnée ponctuellement par les deux valeurs propres $\lambda_\pm$ (positives) et les vecteurs propres $\theta_\pm$ (orthogonaux) d'une matrice 2×2 symétrique définie-positive $\mathbf{G} = \sum_{j=1}^n \nabla I_j \nabla I_j^T$ (le *tenseur de structure* [25,26,28,29]). Les $\lambda_\pm$ définissent respectivement les variations min/max vectorielles de $\mathbf{I}$ dans les directions $\theta_\pm$, c-à-d la configuration locale des discontinuités (notons que $\lambda_+ = \|\nabla I\|$ et que $\theta_+ = \nabla I / \|\nabla I\|$ *pour les images scalaires*). Les méthodes de régularisation existantes se basent généralement sur l'une des approches suivantes, qui représentent trois différents niveaux d'interprétation :

(1) Minimisation de fonctionnelles : Régulariser une image $\mathbf{I}$ peut être vu comme la minimisation d'une certaine fonctionnelle $E(\mathbf{I})$ qui mesure une variation *globale* de $\mathbf{I}$. Minimiser cette variation permet d'enlever le bruit :

$$\min_{\mathbf{I}:\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n} E(\mathbf{I}) = \int_\Omega \phi(\mathcal{N}(\mathbf{I}))\, d\Omega \qquad (1)$$

où $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante et $\mathcal{N}(\mathbf{I})$ est une norme reliée aux *variations locales* de $\mathbf{I}$, par exemple $\mathcal{N}(\mathbf{I}) = \sqrt{\lambda_+ + \lambda_-} = \mathrm{trace}\,(\mathbf{G})^{\frac{1}{2}}$. La minimisation de (1) est ensuite effectuée par une descente de gradient (EDP) donnée par les équations d'Euler-Lagrange de $E(\mathbf{I})$ (voir aussi [5,12,16,18,20,22,26]).

(2) Expressions 'divergence' : Une régularisation peut aussi être vue plus localement comme la diffusion de valeurs d'intensités de $\mathbf{I}$ (vues comme des concentrations chimiques), dirigée par un *tenseur de diffusion* 2×2 [11,28].

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} = \mathrm{div}\,(\mathbf{D} \nabla I_i) \qquad (i = 1..n) \qquad (2)$$

Il est généralement admis que les élements spectraux de $\mathbf{D}$ donnent les poids et les directions du lissage local effectué par (2). $\mathbf{D}$ est donc souvent créé à partir des éléments spectraux de $\mathbf{G}$ pour lisser $\mathbf{I}$ de manière anisotrope, en respectant ainsi ses contours vectoriels. Malgré tout, cette interprétation de (2) ne devrait pas être aussi systématique (voir paragraphes suivants).

(3) Laplaciens orientés : La régularisation d'images $2D$ peut être finalement vue comme la juxtaposition de deux *équations de la chaleur 1D orientées*, c-à-d deux lissages gaussiens monodimensionnels le long de directions orthogonales $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, avec des pondérations c_1 et c_2 [14,19,25,26] :

$$\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} = c_1 \frac{\partial^2 \mathbf{I}}{\partial \mathbf{u}^2} + c_2 \frac{\partial^2 \mathbf{I}}{\partial \mathbf{v}^2} = c_1\, I_{\mathbf{uu}} + c_2\, I_{\mathbf{vv}} \qquad (3)$$

Comme pour les méthodes 'divergence', c_1, c_2 et $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sont exprimés à partir des éléments spectraux $\lambda_\pm$ et $\theta_\pm$ de $\mathbf{G}$, pour lisser de manière à préserver les contours.

Le lien entre ces trois différentes approches (1),(2),(3) n'est généralement pas trivial, particulièrement dans le cas des images multivaluées. Par contre, il est bien connu dans le cas classique de la régularisation dite ϕ-fonctionnelle pour les images *scalaires* ($n = 1$). Dans ce cas, les trois formulations suivantes sont équivalentes :

$$(1)\ \min_{I:\Omega \rightarrow \mathbb{R}} \int_\Omega \phi(\|\nabla I\|)\, d\Omega \Rightarrow (2)\ \frac{\partial I}{\partial t} = \mathrm{div}\left(\frac{\phi'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|} \nabla I\right) \Rightarrow (3)\ \frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\phi'(\|\nabla I\|)}{\|\nabla I\|} I_{\xi\xi} + \phi''(\|\nabla I\|)\, I_{\eta\eta} \qquad (4)$$

où $\eta = \nabla I / \|\nabla I\|$ et $\xi \perp \eta$. Remarquons que cette régularisation donne lieu à un lissage *anisotrope* (effectué dans des directions privilégiées ξ et η), malgré la forme *isotrope* du tenseur de divergence $\mathbf{D} = \phi'(\|\nabla I\|)/\|\nabla I\|\ \mathbf{Id}$.

Dans cet article, nous proposons de trouver de telles équivalences pour le cas plus général de la régularisation d'*images multivaluées*. Nous considérons chacun des trois niveaux d'interprétations (1),(2),(3) dans sa forme générale, et dérivons les équations correspondantes. Nous montrons en particulier que le formalisme des Laplaciens orientés a une interprétation intéressante en terme de *filtrage local*, et représente bien la géométrie du lissage effectué. Nous définissons ensuite une nouvelle approche de régularization multivaluée, qui respecte des propriétés importantes de lissage, ainsi que des schémas numériques appropriés (section 4 et 5). En section 6, nous l'appliquons pour la restauration et l'interpolation d'images ainsi que la visualisation de flots.

2 Un problème variationnel général

Nous considérons d'abord la régularisation d'images multivaluées comme un problème variationnel. Nous voulons trouver les équations du type *'divergence'* correspondantes, c-à-d le lien (1)⇒(2).

• **Une fonctionnelle générique** : Au lieu de considérer une fonctionnelle telle que (1) dépendante d'une norme de variation $\mathcal{N}(\mathbf{I})$, nous proposons plutôt de minimiser cette ψ-fonctionnelle, plus générale :

$$\min_{\mathbf{I}:\Omega\rightarrow\mathbb{R}^n} E(\mathbf{I}) = \int_\Omega \psi(\lambda_+,\lambda_-)\, d\Omega \tag{5}$$

où les $\lambda_\pm$ sont les valeurs propres du tenseur de structure $\mathbf{G}=\sum_{j=1}^n \nabla I_j \nabla I_j^T$, et $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante. C'est une extension naturelle du formalisme des ϕ-fonctions scalaires, pour les images multivaluées.

• **Descente de gradient** : Les équations d'Euler-Lagrange de (5) peuvent être calculées, et se réduisent à une forme simple d'expression du type 'divergence' $\frac{\partial I_i}{\partial t}=\mathrm{div}\,(\mathbf{D}\nabla I_i)$, $(i=1..n)$ (voir [27]), où le tenseur 2×2 $\mathbf{D}$ est simplement défini à partir des dérivées partielles de ψ, et possède les mêmes vecteurs propres θ_+,θ_- que $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{D} = \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_+}(\lambda_+,\lambda_-)\ \theta_+\theta_+^T + \frac{\partial\psi}{\partial\lambda_-}(\lambda_+,\lambda_-)\ \theta_-\theta_-^T$$

• **Lien avec les approches existantes** : Des choix particuliers de fonctions ψ ramènent à des approches variationnelles de régularisation multivaluées connues, telles que l'ensemble des méthodes ϕ-fonctionnelles [16,22] : $\psi(\lambda_+,\lambda_-)=\phi(\sqrt{\lambda_+ + \lambda_-})$, ou encore le flot de Beltrami [12] : $\psi(\lambda_+,\lambda_-) = \sqrt{(1+\lambda_+)(1+\lambda_-)}$. Malgré la forme simple de $\mathbf{D}$, on ne possède toujours pas une bonne estimation de la géométrie de lissage effectuée par l'équation : Par exemple, le cas particulier des ϕ-fonctionnelles conduit à des tenseurs isotropes, alors que le lissage effectif de l'image est bien anisotrope.

3 De la divergence aux Laplaciens orientés

En réalité, nous voulons plutôt développer les expressions 'divergence' (2) en des expressions équivalentes de type *'Laplaciens orientés'*, c-à-d trouver le lien (2)⇒(3). En effet, cette formulation est particulièrement bien adaptée pour comprendre la géométrie de lissage local effectuée par l'EDP :

• **Interprétation géometrique des Laplaciens orientés** : Considérons l'équation (3) basée sur des Laplaciens orientés. Comme $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$, cette EDP peut être exprimée aussi comme :

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} = \mathrm{trace}\,(\mathbf{T}\mathbf{H}_i) \qquad (i=1..n) \tag{6}$$

où les matrices 2×2 $\mathbf{H}_i$ et $\mathbf{T}$ sont respectivement la Hessienne de la composante I_i de l'image $\mathbf{I}$, et le tenseur défini par : $\mathbf{T} = c_1\mathbf{u}\mathbf{u}^T + c_2\mathbf{v}\mathbf{v}^T$, caractérisé par ses deux valeurs propres c_1, c_2 et ses vecteurs propres correspondants $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$. Supposons que $\mathbf{T}$ est un tenseur constant sur le domaine de définition Ω. On peut alors montrer [24,27] que la solution formelle de l'EDP (6) est :

$$I_{i_{(t)}} = I_{i_{(t=0)}} * G^{(\mathbf{T},t)} \quad \text{avec} \quad G^{(\mathbf{T},t)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi t}\exp\left(-\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}}{4t}\right) \tag{7}$$

où $*$ dénote l'opérateur de convolution et $\mathbf{x} = (x \quad y)^T$. $G^{(\mathbf{T},t)}$ est donc un *noyau gaussien orienté par* $\mathbf{T}$. On étend ainsi naturellement la proposition de Koenderink [13], qui montra cette propriété pour le *tenseur de diffusion isotrope* $\mathbf{T} = \mathbf{Id}$, correspondant à *l'équation de la chaleur* : $\frac{\partial I_i}{\partial t} = \Delta I_i$. La première ligne de la Fig.1 illustre un noyau gaussien $G^{(\mathbf{T},t)}(x,y)$ avec un $\mathbf{T}$ anisotrope *(à gauche)* et le résultat de l'évolution de l'EDP associée (6) sur une image couleur *(à droite)*. Le tracé de la fonction $\mathbf{G}^{(\mathbf{T},t)}$ donne une représentation classique de $\mathbf{T}$ par une ellipsoide. Remarquez que la forme de $\mathbf{T}$ donne exactement la géométrie du lissage réel effectué par l'EDP (6).

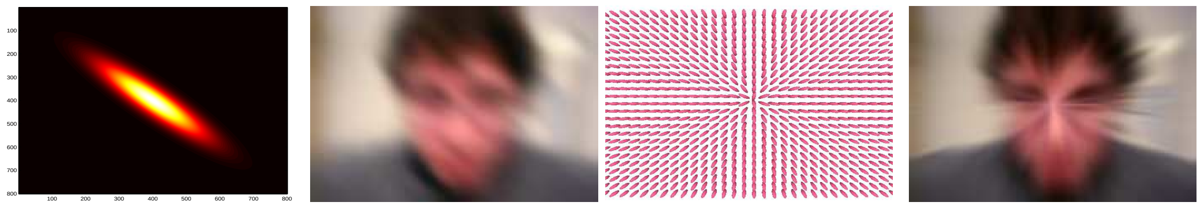


Fig. 1. *Evolution d'EDP de type 'trace' (6) (à droite) avec des tenseurs* $\mathbf{T}$ *constants (gauche) ou variants spatialement (droite).*

Quand $\mathbf{T}$ n'est pas constant (ce qui est généralement le cas), c-à-d représente un champ $\Omega \rightarrow \mathrm{P}(2)$ de tenseurs de diffusion, l'EDP (6) devient *non-linéaire* et peut être alors interprétée comme l'application de masques de filtrages locaux $G^{\mathbf{T},t}(\mathbf{x})$ variant spatialement et temporellement (Fig.1, ligne du bas). Ici, la forme de chaque tenseur $\mathbf{T}(x,y)$ donne *la géométrie locale exacte du lissage* effectué par l'EDP (6). Ce concept de filtrage local fait le lien entre une forme générale d'EDP de régularisation multivaluée et des techniques du type *filtrage bilatéral*, décrites dans [2,23]. Une approche similaire se basant sur des noyaux non gaussiens a été récemment proposée pour le flot de Beltrami [21].

• **Différences entre tenseurs de Trace et de Divergence** : Cette différence entre $\mathbf{D}$ dans l'eq.(2) et $\mathbf{T}$ dans l'eq.(6) peut être comprise de la façon suivante :

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{D}\nabla I_i) = \mathrm{trace}\,(\mathbf{DH}_i) + \nabla I_i^T\, \mathbf{div}\,(\mathbf{D})$$

où $\mathbf{div}\,()$ est défini comme un opérateur de divergence agissant sur une matrice et retournant un vecteur :

$$\text{si } \mathbf{D} = (d_{ij}), \qquad \mathbf{div}\,(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} \mathrm{div}\left((d_{11} \quad d_{12})^T\right) \\ \mathrm{div}\left((d_{21} \quad d_{22})^T\right) \end{pmatrix}$$

Un terme additionnel $\nabla I_i^T \mathbf{div}\,(\mathbf{D})$ apparait. Celui-ci est directement relié à la *variation spatiale* du champ de tenseurs $\mathbf{D}$ et peut perturber le comportement de lissage donné par le premier terme $\mathrm{trace}\,(\mathbf{DH}_i)$, qui correspond bien à un lissage dirigé localement par les éléments spectraux de $\mathbf{D}$. En conséquence, l'équation divergence (2) peut lisser l'image $\mathbf{I}$ avec des directions très différentes de celles de $\mathbf{D}$. C'est exactement ce qui se passe pour les formulations ϕ-fonctions, où le lissage ne se comporte pas finalement (et heureusement) de manière isotrope, malgré la forme isotrope du tenseur de divergence $\mathbf{D} = \phi'(\|\nabla I\|)/\|\nabla I\|\ \mathbf{Id}$.

• **Développement de la divergence** : Supposons maintenant que le tenseur de divergence $\mathbf{D}$ dépende seulement des éléments spectraux du tenseur de structure $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{D} = f_1(\lambda_+,\lambda_-)\theta_+\theta_+^T + f_2(\lambda_+,\lambda_-)\theta_-\theta_-^T \tag{8}$$

avec $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, (c'est effectivement le cas pour les équations proposées dans la littérature). Nous pouvons dans ce cas développer l'équation divergence $\mathrm{div}\,(\mathbf{D}\nabla I_i)$ en une somme de Laplaciens orientés, c-à-d des EDP de type 'trace' (détails des calculs dans [24,27]) :

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{D}\nabla I_i) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{trace}\left((\delta_{ij}\mathbf{D} + \mathbf{Q}^{ij})\mathbf{H}_j\right) \tag{9}$$

où les $\mathbf{Q}^{ij}$ désignent une *famille de n^2 matrices* $(i,j = 1..n)$, définies comme les parties symétriques des matrices $\mathbf{P}^{ij}$ suivantes (c-à-d $\mathbf{Q}^{ij} = (\mathbf{P}^{ij} + \mathbf{P}^{ij^T})/2$) :

$$\mathbf{P}^{ij} = \alpha\, \nabla I_i^T \nabla I_j \mathbf{Id} + 2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda_+}\theta_+\theta_+^T + \frac{\partial\alpha}{\partial\lambda_-}\theta_-\theta_-^T\right)\nabla I_j \nabla I_i^T \mathbf{G} + 2\left((\alpha + \frac{\partial\beta}{\partial\lambda_+})\theta_+\theta_+^T + (\alpha + \frac{\partial\beta}{\partial\lambda_-})\theta_-\theta_-^T\right)\nabla I_j \nabla I_i^T \tag{10}$$

avec $\alpha = \frac{f_1(\lambda_+,\lambda_-)-f_2(\lambda_+,\lambda_-)}{\lambda_+-\lambda_-}$, $\beta = \frac{\lambda_+ f_2(\lambda_+,\lambda_-)-\lambda_- f_1(\lambda_+,\lambda_-)}{\lambda_+-\lambda_-}$

Ce développement (9) englobe une grande variété d'EDP de régularisation déjà existants (qu'elles proviennent d'un principe variationnel ou directement d'une forme divergence) et les exprime en une équation étendue de type Laplacien orientés, composée de *plusieurs contributions de diffusion* ayant chacune une interprétation géométrique simple en terme de filtrage local. Ici, il est particulièrement intéressant de remarquer que des *tenseurs de diffusion additionnels* $\mathbf{Q}^{ij}$ apparaissent pendant le développement de l'équation, et contribuent à modifier le comportement du lissage, qui n'est finalement *plus donné par le tenseur de divergence initial* $\mathbf{D}$.

4 Une Expression Unificatrice

A partir de ces développements, nous pouvons définir *une EDP de régularisation multivaluée générique* :

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{trace}\left(\mathbf{A}^{ij}\mathbf{H}_i\right) \qquad (i = 1..n) \tag{11}$$

où les $\mathbf{A}^{ij}$ forment une famille de matrices symétriques 2×2, et $\mathbf{H}_i$ est la matrice Hessienne de I_i. L'équation (11) être exprimée également en utilisant une notation *super-matricielle* : $\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} = \mathbf{trace}\,(\mathcal{A}\mathcal{H})$ où $\mathcal{A}$ est la *matrice de tenseurs de diffusion* $\mathbf{A}^{ij}$ (elle-même considérée comme *symétrique*), et $\mathcal{H}$ est le *vecteur des matrices Hessiennes* $\mathbf{H}_j$. Le produit matriciel $\mathcal{A}\mathcal{H}$ est alors vu *sous-matrice par sous-matrice*, et l'opérateur **trace** () retourne le vecteur de $\mathbb{R}^n$ composé des traces de chaque sous-matrice résultante.

• **Lien avec des expressions existantes** : L'EDP (11) est une équation unificatrice qui peut être utilisée pour décrire un grand nombre de méthodes de régularisation :

* Premièrement, elle développe en une formulation très locale à la fois les approches variationnelles et 'divergence', qui peuvent être exprimées sous la forme $\frac{\partial I_i}{\partial t} = \mathrm{div}\,(\mathbf{D}\nabla I_i)$ (voir section 2). Cela englobe en particulier les travaux [5,11,12,16,18,20,22,**?**,28]. Dans ce cas, les tenseurs $\mathbf{A}^{ij}$ valent $\mathbf{A}^{ij} = \delta_{ij}\mathbf{D}+\mathbf{Q}^{ij}$. Ici, les $\mathbf{Q}^{ij}$ $(i \neq j)$ correspondent à des contributions diffusives d'autres composantes I_j dans la composante courante I_i. Cette sorte de *transfert d'énergie de diffusion* exprime un *couplage* particulier qui se produit entre les différentes composantes de l'image $\mathbf{I}$.

* Deuxièmement, l' EDP (11) rassemble aussi les formulations du type Laplaciens orientés $\frac{\partial I_i}{\partial t} = \mathrm{trace}\,(\mathbf{T}\mathbf{H}_i)$, en choisissant $A^{ij} = \delta_{ij}\mathbf{T}$. Dans ce cas, la matrice $\mathcal{A}$ est diagonale et aucun transfert d'énergie de diffusion ne se produit entre les composantes vectorielles I_i. Le couplage est seulement présent à travers les éléments spectraux $\lambda_\pm$ et $\theta_\pm$ de $\mathbf{G}$, intervenants dans le calcul de $\mathbf{T}$. Cela unifie par exemple les différentes formulations proposées dans [14,19,25,26].

• **Une nouvelle EDP de régularisation** : L'équation de régularisation générale (11) peut être spécialisée, pour respecter certaines contraintes géométrique locales de lissage :

* Nous ne voulons pas de contributions de diffusion entre les différentes composantes vectorielles. Le couplage désiré dans l'équation devrait seulement apparaitre à travers le calcul d'une géometrie de diffusion commune, c-à-d par le tenseur de structure $\mathbf{G}$. Nous devons donc seulement définir un tenseur $\mathbf{A}$, puis choisir $\mathbf{A}^{ij} = \delta_{ij}\mathbf{A}$.

* Dans les régions homogènes (correspondantes à de faibles variations vectorielles), nous voulons lisser de manière *isotrope*, pour enlever le bruit le plus efficacement possible sans directions de lissage privilégiées : $\frac{\partial I_i}{\partial t} \simeq \Delta I_i = \mathrm{trace}\,(\mathbf{H}_i)$. Pour cela, le tenseur $\mathbf{A}$ doit être *isotrope* dans ces régions : $\lim_{(\lambda_+ + \lambda_-)\to 0} \mathbf{A} = \alpha\mathbf{Id}$.

* Sur les discontinuités, nous voulons lisser de manière *anisotrope suivant les contours* θ_-, pour les préserver tout en enlevant le bruit : $\frac{\partial I_i}{\partial t} = \mathrm{trace}\left(\beta\theta_-{\theta_-}^T\mathbf{H}_i\right)$, où β est une fonction décroissante pour éviter cependant le sur-lissage des points à forte courbure (coins). On choisit donc un tenseur *anisotrope* dans ces régions : $\lim_{(\lambda_+ + \lambda_-)\to 0} \mathbf{A} = \beta\theta_-\theta_-^T$.

L'EDP de régularisation multivaluée suivante respecte toutes ces propriétés géométriques locales :

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} = \mathrm{trace}\,(\mathbf{T}\mathbf{H}_i) \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{T} = f_+\left(\sqrt{\lambda_+^* + \lambda_-^*}\right)\,\theta_-^*{\theta_-^*}^T + f_-\left(\sqrt{\lambda_+^* + \lambda_-^*}\right)\,\theta_+^*{\theta_+^*}^T \tag{12}$$

$\lambda_\pm^*$ et $\theta_\pm^*$ étant les élements spectraux de $\mathbf{G}_\sigma = \mathbf{G} * G_\sigma$, une version *lissée du tenseur de structure* $\mathbf{G}$, donnant une approximation plus cohérente des directions de variations vectorielles (voir [28]). Pour nos expériences (section 6), nous avons choisi $f_+(s) = \frac{1}{1+s^2}$ et $f_-(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$. C'est un des nombreux choix possibles (inspiré de la formulation *hyper-surface* pour les images scalaires [1]) qui vérifie les propriétés désirées. Ce qui est intéressant, c'est de pouvoir choisir librement les fonctions de pondération $f_\pm$ pour obtenir des comportements de régularisation spécifiques, le comportement local du lissage effectué par (12) étant parfaitement connu.

5 Schémas numériques

Notre EDP (12) peut être implémentée par des schémas numériques classiques en utilisant des discrétisations spatiales centrées des gradients et des Hessiens [15]. Nous proposons ici une approche alternative, basée sur l'interprétation du processus (6) en terme de filtrage local (section 3) : la vitesse d'évolution de l'EDP peut être localement estimée en appliquant un masque de filtrage $\mathbf{G}^{(\mathbf{T},t)}$ qui varie spatialement sur l'image $\mathbf{I}$:

$$\operatorname{trace}(\mathbf{T}\mathbf{H}_i) = \sum_{k,l=-1}^{1} \mathbf{G}^{(\mathbf{T}_{(x,y)},dt)}(k,l)\; I_i(x-k,y-l)$$

Ce schéma préserve le *principe du maximum*, puisque l'évolution est effectué en appliquant des *noyaux gaussiens orientés et normalisés* sur chaque voisinage de $I_i(x,y)$. Il est également précis, car le calcul des $\mathbf{G}^{(\mathbf{T},t)}$ demande uniquement l'approximation de dérivées premières, et pas de dérivées secondes, plus imprécises (Fig.2). L'inconvénient majeur de ce schéma est d'être particulièrement gourmand en temps de calcul, car le calcul des masques locaux nécessite l'évaluation de plusieurs exponentielles, et ce, pour chaque pixel et pour chaque itération. Pour nos expériences, nous avons choisi des masques 5×5.

(a) Noisy image (b) Schéma utilisant des différences finies (c) Schéma utilisant du filtrage local

Fig. 2. *Comparaisons des schémas numériques.*

6 Applications à des problèmes réels

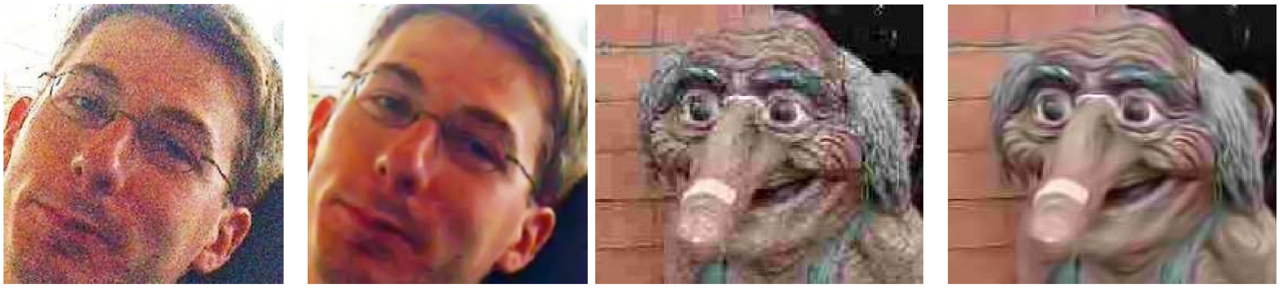
Nous avons appliqué notre équation de régularisation (12) à des problèmes importants de traitement d'images, comme par exemple la restauration d'images couleurs bruitées (Fig.3a), l'amélioration d'images compressées avec perte (JPG, Fig.3b), l'Inpainting d'images couleurs (Fig.3c,d,e) (voir aussi [4,7,9]), l'agrandissement d'images couleurs (Fig.3g). Nous avons traité également le cas de la visualisation de flots : Soit un champ de vecteurs $2D$ $\mathcal{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$. Nous pouvons le représenter avec des flèches en chaque point (Fig.3f,gauche). Mais un sous-échantillonage du champ est nécéssaire car cette représentation n'est pas adaptée pour des champs de grande taille. Une solution alternative est la suivante : Nous lissons une image complètement bruitée $\mathbf{I}$, avec une EDP de lissage telle que (12) mais où $\mathbf{T}$ est dirigé par $\mathcal{F}$, plutôt que par les éléments spectraux d'un tenseur de structure $\mathbf{G}$ (qui n'aurait que peu de sens pour une image $\mathbf{I}$ de bruit) : $\frac{\partial I_i}{\partial t} = \operatorname{trace}\left(\left[\frac{1}{\|\mathcal{F}\|}\mathcal{F}\mathcal{F}^T\right]\mathbf{H}_i\right) \quad (i=1..n)$. Au fur et à mesure de l'évolution, les structures de $\mathcal{F}$ apparaissent dans $\mathbf{I}$ permettant la visualisation du champ sous forme d'une texture (Fig.3f,droite). Ici, notre équation de régularisation *assure que le lissage est bien effectué dans la direction du flot* $\mathcal{F}$ (Fig.3f). Ce n'est pas le cas dans [3,6,10], où les auteurs ont basés leur équation sur des expressions 'divergence', introduisant ainsi un risque de lisser l'image dans de mauvaises directions, comme cela a été montré en section 3.

Conclusion & Perspectives

Nous avons proposé un formalisme unificateur qui exprime un large ensemble de méthodes de régularisation multivaluées existantes dans un formalisme EDP commun, mieux adapté pour comprendre le comportement diffusif local de ces équations. De cette étude, nous avons défini une équation de régularisation spécifique qui tient compte de la géométrie locale des images. L'application de nos algorithmes a finalement démontré l'efficacité pratique de l'approche proposée. Plus de résultats peuvent être trouvés sur la page web : *http ://www-sop.inria.fr/odyssee/team/David.Tschumperle*

Références

1. G. Aubert and P. Kornprobst. *Mathematical Problems in Image Processing : PDE's and the Calculus of Variations*, vol. 147 of *App. Mathem. Sciences*. Springer-Verlag, January 2002.
2. D. Barash. Bilateral filtering and anisotropic diffusion : Towards a unified viewpoint. Technical report, HP Laboratories Israel, 2000.
3. J. Becker, T. Preusser, and M. Rumpf. PDE methods in flow simulation post processing. *Computing and Visualization in Science*, 3(3) :159–167, 2000.
4. M. Bertalmio, G. Sapiro, V. Caselles, and C. Ballester. Image inpainting. In Kurt Akeley, editor, *Proceedings of the SIGGRAPH*, pages 417–424. ACM Press, Addison Wesley Longman, 2000.
5. P. Blomgren and T.F. Chan. Color TV : Total variation methods for restoration of vector-valued images. *IEEE Trans. Imag. Proc.*, 7(3) :304–309, 1998. Special Issue.
6. D. Buerkle, T. Preusser, and M. Rumpf. Transport and diffusion in timedependent flow visualization. In *Proceedings IEEE Visualization*, 2001.
7. T. Chan, S.H. Kang, and J. Shen. Euler's elastica and curvature based inpainting. *SIAM J. Appl. Math.*, 2002.
8. T. Chan and J. Shen. Mathematical models for local deterministic inpaintings. Technical Report 00-11, Department of Mathematics, UCLA, Los Angeles, March 2000.
9. T.F. Chan and J. Shen. Non-texture inpainting by curvature-driven diffusions (CDD). *J. Visual Comm. Image Rep.*, 12(4) :436–449, 2001.
10. U. Diewald, T. Preusser, and M. Rumpf. Anisotropic diffusion in vector field visualization on euclidian domains and surfaces. *IEEE Trans. on Visualization and Comp. Graphics*, 6(2) :139–149, 2000.
11. G. Gerig, O. Kubler, R. Kikinis, and F. Jolesz. Nonlinear anisotropic filtering of mri data. *IEEE TMI*, 11(2) :221–231, 1992.
12. R. Kimmel, R. Malladi, and N. Sochen. Images as embedded maps and minimal surfaces : movies, color, texture, and volumetric medical images. *Internat. Journal of Comp. Vision*, 39(2) :111–129, 2000.
13. J.J. Koenderink. The structure of images. *Biological Cybernetics*, 50 :363–370, 1984.
14. P. Kornprobst, R. Deriche, and G. Aubert. Nonlinear operators in image restoration. In *Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 325–331, Puerto Rico, June 1997. IEEE Computer Society, IEEE.
15. Laurence Lucido, Rachid Deriche, Luis Alvarez, and Vincent Rigaud. Sur quelques schémas numériques de résolution d'équations aux dérivées partielles pour le traitement d'images. Rapport de Recherche 3192, INRIA, June 1997.
16. A. Pardo and G. Sapiro. Vector probability diffusion. In *Proceedings of the International Conference on Image Processing*. IEEE Signal Processing Society, September 2000.
17. P. Perona and J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7) :629–639, July 1990.
18. G. Sapiro. *Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis*. Cambridge University Press, 2001.
19. G. Sapiro and D.L. Ringach. Anisotropic diffusion of multivalued images with applications to color filtering. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(11) :1582–1585, 1996.
20. J. Shah. Curve evolution and segmentation functionals : Applications to color images. In *Proceedings of the International Conference on Image Processing*, pages 461–464, 1996.
21. N. Sochen, R. Kimmel, and A.M. Bruckstein. Diffusions and confusions in signal and image processing. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 14(3) :195–209, 2001.
22. B. Tang, G. Sapiro, and V. Caselles. Diffusion of general data on non-flat manifolds via harmonic maps theory : The direction diffusion case. *Internat. Journal of Comp. Vision*, 36(2) :149–161, 2000.
23. C. Tomasi and R. Manduchi. Bilateral filtering for gray and color images. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision*, pages 839–846, January 1998.
24. D. Tschumperlé. *PDE's Based Regularization of Multivalued Images and Applications*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, December 2002.
25. D. Tschumperlé and R. Deriche. Constrained and unconstrained PDE's for vector image restoration. In Ivar Austvoll, editor, *Proceedings of the 10th Scandinavian Conference on Image Analysis*, pages 153–160, Bergen, Norway, June 2001.
26. D. Tschumperlé and R. Deriche. Diffusion PDE's on Vector-Valued images. *IEEE Signal Processing Magazine*, 19(5) :16–25, 2002.
27. D. Tschumperlé and R. Deriche. Vector-valued image regularization with PDE's : A common framework for different applications. RR 4657, INRIA Sophia-Antipolis, December 2002.
28. J. Weickert. *Anisotropic Diffusion in Image Processing*. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1998.
29. S. Di Zenzo. A note on the gradient of a multi-image. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 33 :116–125, 1986.



(a) Restauration d'une image couleur bruitée *(b) Amélioration d'une image compressée avec perte*

(c) Inpainting de texte sur une image couleur *(d) EDP d'Inpainting utilisée pour enlever des objets réels*

(e) Reconstruction d'une image couleur partiellement codée *(f) Visualisation d'un champ de vecteurs 2D par EDP*

(g) Agrandissement (×4) d'une image couleur 64 × 64, avec (de gauche à droite) : interpolation par bloc, interpolation linéaire, méthode EDP

Fig. 3. Utilisation de notre EDP de régularisation pour la restauration d'images couleurs, l'inpainting, l'agrandissement et la visualisation de champs de vecteurs $2D$.